Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Fundamentos da Teoria da Decisão

Prof. Dr. Luís Antonio Benedetti

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

INTRODUÇÃO

O sucesso ou fracasso de uma pessoa ao longo de sua vida depende, fundamentalmente, das decisões que ela toma.

Por exemplo, o gerente do projeto do ônibus espacial *Challenger* não trabalha mais na NASA. O engenheiro que projetou o campeão de vendas *Mustang*, tornou-se presidente da *Ford Motor Company*.

A teoria da decisão é um enfoque analítico e sistemático de uma determinada situação para apoiar uma tomada de decisão

Qual é a diferença entre uma *decisão correta* e uma decisão ruim?

Decisão correta:

1. Baseada na lógica
2. Considera todos os dados disponíveis
3. Leva em conta todas as possíveis alternativas
4. Método quantitativo de apoio à decisão

Eventualmente, uma boa decisão pode resultar em um resultado inesperado ou desfavorável. Entretanto, se a decisão foi tomada da maneira correta, ela continua sendo uma boa decisão.

Se você toma uma decisão ruim e obtém resultados favoráveis, a decisão continua sendo ruim.

Entretanto, a longo prazo, a Teoria da Decisão será muito útil na obtenção de resultados favoráveis.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

1. Os Seis passos da Teoria da Decisão:

1. Definir claramente o problema
2. Listar as possíveis alternativas
3. Identificar os possíveis contextos
4. Listar os resultados associados a cada combinação de alternativa e contexto
5. Selecionar um modelo matemático de apoio a tomada de decisão
6. Aplicar o modelo e escolher a decisão

Exemplo:

Vamos considerar, como exemplo, o caso da empresa WTA Transformadores para ilustrar estes seis passos da Teoria da Decisão. O Sr Thomas Witt é o fundador e presidente da WTA Transformadores , uma lucrativa empresa, que fabrica e comercializa transformadores.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Passo 1:

O problema que o Sr Witt identificou é se expande sua linha de produtos, fabricando e comercializando um novo transformador de alta tensão.

Passo 2:

Thomas Witt definiu as seguintes possíveis alternativas ou estratégias: (1) Construir uma fábrica de grande capacidade para fabricar o novo transformador; (2) Construir uma fábrica de pequena capacidade para fabricar o novo transformador e (3) Não construir fábrica alguma, isto é, não desenvolver o novo transformador.

Passo 3:

Contextos: (1) mercado favorável com existência de uma grande demanda pelo produto, (2) mercado desfavorável com uma pequena demanda. Contextos sobre os quais o tomador de decisão não tem controle ou tem pouco controle, são chamados de *contextos naturais*.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Passo 4:

Nesta etapa Thomas Witt precisa registrar o resultado associado à cada combinação alternativa/contexto. Neste caso como ele deseja maximizar o retorno, deve avaliar cada conseqüência da combinação. Na Teoria da Decisão, os resultados (financeiros ou não), são chamados de *valores condicionais.* O Sr. Witt avaliou o resultado associado a cada conseqüência, e formou uma tabela de resultados:

Alternativas	**Contextos naturais**	
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**
Fábrica de grande capacidade	200.000	-180.000
Fábrica de pequena capacidade	100.000	-20.000
Não construir fábrica	0	0

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Passos 5 e 6:

Estes dois últimos passos envolvem a seleção e a aplicação de um modelo matemático de apoio a tomada de decisão. a seleção do modelo depende do ambiente no qual a decisão deve ser tomada e do risco e incerteza envolvida.

2. Tipos de ambientes para a tomada de decisão

O tipo de decisão a ser tomada depende do grau de conhecimento e da quantidade de informações que se dispõe sobre a situação na qual a decisão deve ser tomada. Existem três ambientes para tomada de decisão:

Tipo 1 - Tomada de Decisão sob Certeza.
Tipo 2 - Tomada de Decisão sob Risco.
Tipo 3 - Tomada de Decisão sob Incerteza.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tipo 1 - Tomada de Decisão sob Certeza:
Nesse ambiente o tomador de decisão sabe com certeza o contexto associado a cada alternativa. Se o Sr. Witt soubesse que o mercado para transformadores de alta tensão seria favorável, que decisão ele deveria tomar?

Tipo 2 - Tomada de Decisão sob Risco.
Nesse ambiente o tomador de decisão conhece a probabilidade de ocorrência de cada contexto. Os modelos de Teoria da Decisão nesses ambientes, normalmente empregam dois critérios equivalentes: *maximização do valor monetário esperado* e *minimização da perda esperada.*

Tipo 3 - Tomada de Decisão sob Incerteza.
Nesse ambiente o tomador de decisão não conhece as probabilidades de ocorrência de cada contexto.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

3. Tomada de decisão sob risco

Vários possíveis contextos podem ocorrer, cada um com uma dada probabilidade, a tomada de decisão sob risco é uma situação de decisão probabilística. Discutiremos o método da maximização do valor monetário esperado.

Valor Monetário Esperado (VME)

O VME para uma alternativa é soma dos possíveis resultados das *n* alternativas, ponderados pela probabilidade de ocorrência de cada contexto, ou seja:

VME(alternativa i)=(resultado do 1º contexto) x (prob. do 1º contexto) + (resultado do 2º contexto) x (prob. do 2º contexto)+ ... + (resultado do último contexto) x (prob.do último contexto)

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

No exemplo da WTA transformadores suponhamos que o Sr. Thomas saiba que um mercado favorável e um desfavorável tenham uma mesma probabilidade de ocorrência de 0,50. Qual alternativa daria o maior valor monetário esperado?

Alternativas	**Contextos naturais**		**Valor Monetário Esperado (VME)**
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**	
Fábrica de grande capacidade	200.000	-180.000	10.000
Fábrica de pequena capacidade	100.000	-20.000	40.000
Não construir fábrica	0	0	0
Probabilidades	0,50	0,50	

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Valor Esperado com Informação Precisa (VECIP)

Imaginemos que a *Marketing Survey* promete realizar uma pesquisa de mercado e informar ao Sr. Thomas, com absoluta certeza, se o mercado será favorável ou não ao novo produto, cobrando $ 65.000. O que você recomendaria ao Sr.Thomas?

VECIP é o retorno médio ou esperado, a longo prazo, se temos uma informação precisa, sobre a probabilidade de ocorrência de cada contexto, antes da decisão ser tomada:

> VECIP=(melhor resultado do 1º contexto) x (prob. do 1º contexto) + (melhor resultado do 2º contexto) x (prob. do 2º contexto)+ ...+ (melhor resultado do último contexto) x (prob.do último contexto)

O Valor da Informação Precisa (VIP) será dado por

VIP = VECIP - máximo (VME)

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Utilizando os dados da tabela de decisão do Sr. Thomas:
VECIP = (200.000)x(0,50)) + (0)x(0,50) = $ 100.000
Como o máximo do VME é $40.000, temos

VIP = 100.000 – 40.000 = 60.000

Este é o máximo valor que Thomas Witt deveria pagar pela informação da Marketing Survey

Perda de Oportunidade

Num ambiente de tomada de decisão sob risco, um método alternativo à maximização do valor monetário esperado é o método da minimização da perda de oportunidade esperada (POE), que é a diferença entre o resultado ótimo e o resultado realizado. Em outras palavras, é o valor perdido por não se optar pela melhor alternativa.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

No exemplo da WTA transformadores, temos:

Tabela de Perda de Oportunidade da WTA

Alternativas	Contextos naturais	
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**
Fábrica de grande capacidade	200.000 - 200.000 = 0	0 - (-180.000) = 180.000
Fábrica de pequena capacidade	200.000 - 100.000 = 100.000	0 - (-20.000) = 20.000
Não construir fábrica	200.000 - 0 = 200.000	0 - 0 = 0
Probabilidades	0,50	0,50

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

A POE de cada alternativa é calculada multiplicando-se a probabilidade de ocorrência de cada contexto, pela respectiva perda de oportunidade associada àquele contexto, ou seja:

POE (Fab. grande capacidade) =
(0,50)x(0) + (0,50)x(180.000) = $ 90.000

POE (Fab. pequena capacidade) =
(0,50)x(100.000) + (0,50)x(20.000) = $ 60.000

POE (nenhuma fábrica) =
(0,50)x(200.000) + (0,50)x(0) = $ 100.000

Portanto melhor decisão para a a WTA seria a construção de uma fábrica de pequena capacidade. Note que este método é equivalente ao método max(VME) e que seguinte relação sempre valerá:

VIP = Mínima (POE)

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade investiga como nossa decisão pode mudar quando algum dado do problema é alterado. Vamos investigar o impacto da mudança na probabilidade de ocorrência de cada contexto, na decisão a ser tomada pela WTA Transformadores.

Seja:

p = Probabilidade de um mercado favorável

Logo:

$(1-p)$ = Probabilidade de um mercado desfavorável

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Agora, nós podemos expressar o valor monetário esperado (VME) de cada alternativa, em termos de *p*. Isto é feito a seguir:

VME (Fab grande capacidade) =
$(200.000)\text{x}(p) + (-180.000)\text{x}(1-p) = 380.000p - 180.000$

VME (Fab. pequena capacidade) =
$(100.000)\text{x}(p) + (-20.000)\text{x}(1-p) = 120.000p - 20.000$

VME (nenhuma fábrica) = $(0)\text{x}(p) + (0)\text{x}(1-p) = 0$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Há também dois outros enfoques para a análise de sensibilidade:

1. **Tentativa e erro:** resolver o problema diversas vezes, preferencialmente usando o computador, onde em cada solução um parâmetro do problema é alterado.

2. **Análise pós-otimização**. identificar o campo de variação dos parâmetros do problema que não afetam a solução ótima.

   Quando a solução ótima de um problema de Programação Linear é obtida através do Excel, o próprio *software* elabora dois relatórios (sensibilidade e limites) que são muito úteis para se realizar a análise de sensibilidade do modelo formulado.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tomada de decisão sob incerteza

Quando esta probabilidade não pode ser estimada com um certo grau de confiança ou quando não há qualquer informação a respeito desta probabilidade, outros critérios de decisão são necessários.

1. Maximaxi
2. Maximini
3. Equiprobabilidade
4. Critério realista
5. Minimaxi

Os quatro primeiros critérios podem ser aplicados diretamente sobre a tabela de decisão, enquanto que o critério minimax requer o uso da tabela de perda de oportunidade.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Maximax

O critério maximax seleciona a alternativa que maximiza o melhor resultado de cada uma das alternativas. Ele é também conhecido como *critério de decisão otimista*.

Aplicação do critério maximaxi

Alternativas	**Contextos naturais**		**Melhor resultado ($)**
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**	
Fábrica de grande capacidade	200.000	-180.000	**200.000 Maximaxi**
Fábrica de pequena capacidade	100.000	-20.000	100.000
Não construir fábrica	0	0	0

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Equiprobabilidade (Laplace)

Este critério de decisão, também chamado *Laplace* seleciona a alternativa com o melhor resultado médio. Primeiro você calcula o resultado médio de cada alternativa, somando-se todos os possíveis resultados e dividindo-se a soma pelo número de contextos possíveis. A seguir seleciona-se a alternativa com o melhor resultado médio.

Aplicação do critério de equiprobabilidade

Alternativas	**Contextos naturais**		**Resultado médio ($)**
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**	
Fábrica de grande capacidade	200.000	-180.000	10.000
Fábrica de pequena capacidade	100.000	-20.000	**40.000 Equiprobabilidade**
Não construir fábrica	0	0	0

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Critério Realista

Freqüentemente chamado de critério da média ponderada. Primeiramente, é necessário definir-se o coeficiente de realismo α, que pode variar entre zero e um. A vantagem deste critério é que ele permite ao tomador de decisão construir uma percepção pessoal mais otimista ou mais realista.

Critério realista = (α)x(melhor resultado) + (1 - α)x(pior resultado)

Aplicação do critério realista

Alternativas	**Contextos naturais**		**Critério realista (α = 0,80) ($)**
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**	
Fábrica de grande capacidade	200.000	-180.000	**124.000 Critério Realista**
Fábrica de pequena capacidade	100.000	-20.000	76.000
Não construir fábrica	0	0	0

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Minimaxi

O último critério de decisão num ambiente de tomada de decisão sob incerteza é baseado na perda de oportunidade. O critério minimaxi seleciona a alternativa que minimiza a máxima perda de oportunidade de cada uma das alternativas. Primeiro selecionamos a maior perda de oportunidade de cada alternativa. Depois selecionamos a alternativa com a menor dessas perdas.

Aplicação do critério minimaxi

Alternativas	**Contextos naturais**		**Perda máxima ($)**
	Mercado favorável ($)	**Mercado desfavorável ($)**	
Fábrica de grande capacidade	0	180.000	180.000
Fábrica de pequena capacidade	100.000	20.000	**100.000 Minimaxi**
Não construir fábrica	200.000	0	200.000

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise marginal com muitas alternativas e contextos

Como proceder quando existe um grande número de alternativas e/ou de contextos? Por exemplo, uma lanchonete *fast food* tem capacidade para estocar até 500 pães de sanduíche. Diariamente, a demanda por sanduíches varia de 100 a 500 unidades. Neste caso, teríamos que analisar 501 alternativas diferentes (quantidades de pães em estoque) e 401 possíveis contextos (demanda diária por sanduíches).

Se for possível identificar o ganho marginal GM (o ganho obtido com a venda de um sanduíche) ou perda marginal PM (a perda causada por um pão que fica estocado e não é vendido), poderemos utilizar a análise marginal para encontrarmos a melhor alternativa, sem a necessidade de construirmos uma tabela tão grande.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Se existe uma quantidade finita de alternativas e contextos, a análise marginal com distribuição discreta pode ser utilizada.
Se existe um grande número de alternativa e contextos e a distribuição de probabilidade pode ser descrita como uma distribuição normal, então, a análise marginal com distribuição normal deve ser usada. Os dois casos serão discutidos a seguir:

Análise marginal com distribuição discreta

Sejam

p = probabilidade da demanda ser maior ou igual ao nível de estoque, então

$(1-p)$ = probabilidade da demanda ser menor do que o nível de estoque

O ganho marginal esperado (GME) será dado por:

$$GME = (p)x(GM)$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Analogamente, a perda marginal esperada (PME) será dada por:

$$PME = (1-p)x(PM)$$

A decisão ótima ocorre sempre que GME $\geq$ PME, ou seja:

$$p \geq PM/(GM + PM)$$

Em outras palavras, enquanto a probabilidade de vender mais uma unidade do produto for maior ou igual à PM/(GM + PM), o nível de estoque pode ser acrescido de uma unidade.

O método de análise marginal com distribuição discreta segue os seguintes passos:

1. Determinar o valor de *p* para o problema
2. Construir uma tabela de probabilidade acumulada
3. Selecionar o nível de estoque com base no valor de *p*

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Exemplo: Um Café popular de São Paulo, especializado em café com torradas, compra as torradas frescas diariamente de uma confeitaria. O Café paga R$ 4,00 pelo pacote de 20 torradas. Qualquer pacote não vendido até o fim do dia é descartado, porque o Café não serve torrada do dia anterior. Cada pacote de torrada é vendido por R$ 6,00. Assim, o ganho marginal de cada pacote de torradas vendido é de R$ 2,00 e a perda marginal de cada pacote de torradas não vendido é de R$ 4,00, uma vez que o mesmo não pode ser devolvido.
Vamos determinar o nível de estoque ótimo de pacotes.

Com base num histórico recente, o gerente do Café estima que a demanda diária por pacotes de torradas segue a distribuição de probabilidade mostrada na tabela seguinte:

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Distribuição de probabilidade de vendas de torradas

Número de pacotes de torradas demandado	Probabilidade de vender o número de pacotes de torradas
4	0,05
5	0,15
6	0,15
7	0,20
8	0,25
9	0,10
10	0,10
Total	1,00

Passo 1. Determinação do valor de *p*:

$$P \geq PM/(GM + PM) = 4/(4 + 2) = 0,66$$

$$P \geq 0,66$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Passo 2. Cálculo da probabilidade acumulada:

Distribuição de probabilidade acumulada de vendas de torradas

Número de pacotes de torradas demandado	Probabilidade de vender o número de pacotes de torradas	Probabilidade de vender até o número de pacotes
4	0,05	1,00
5	0,15	0,95
6	0,15	0,80
7	0,20	0,65
8	0,25	0,45
9	0,10	0,20
10	0,10	0,10
Total	1,00	

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Passo 3. Seleção do nível ótimo de estoque:

Compara-se a probabilidade acumulada com o valor calculado de *p*. O nível de estoque pode ser aumentado enquanto for verdadeira a regra de decisão ótima,

$$p \geq 0{,}66.$$

Se o nível de estoque for de 6 pacotes de torradas, temos:

P(vendas menor ou igual a 6) = 0,80 $\geq$ 0,66.

Para um nível de estoque de 7 pacotes temos:

P(vendas menor ou igual a 7) = 0,65 < 0,66

Portanto, o nível ótimo de estoque é de 6 pacotes de torradas.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Otimização de Processos (Programação Linear) (PL)

Prof. Dr. Luís Antonio Benedetti

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

INTRODUÇÃO

A programação linear pertence a uma classe de problemas chamada *otimização*, que visa maximizar ou minimizar (otimizar) uma função de várias variáveis sujeita a certas restrições.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

EXEMPLO 1

Uma pequena indústria produz artigos A_1 e A_2 que são vendidos a R$200,00 e R$300,00 respectivamente. Na sua produção são utilizados 3 tipos de matérias-primas, P_1 , P_2 e P_3 , que são gastas da seguinte forma:

- 2 unidades de P_1 para fabricar 1 unidade de A_1,
- 4 unidades de P_2 para fabricar 1 unidade de A_1,
- 1 unidade de P_1 para fabricar 1 unidade de A_2,
- 1 unidade de P_3 para fabricar 1 unidade de A_2.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Por razões econômicas, as matérias-primas P_1, P_2 e P_3 estão disponíveis no máximo em 20, 32 e 10 unidades, respectivamente.

O dono da empresa deseja saber as quantidades dos produtos A_1 e A_2 que devem ser produzidas para que a receita bruta seja a maior possível.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Para responder a esta pergunta vamos reformular a situação como um problema de programação linear. Para tanto, suponhamos que:

a) a quantidade do produto a ser vendida é igual à quantidade do produto a ser fabricada, isto é, não há estoque;
b) a receita bruta é proporcional à quantidade vendida;
c) as matérias-primas gastas são proporcionais às quantidades produzidas;
d) quantidades negativas de produtos A_1 e A_2 não terão significado algum.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Considerando-se as hipóteses (a) e (b), a função $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$ exprime a receita bruta.

Como existe limite na disponibilidade das matérias-primas, elas formam as restrições do problema. Portanto, admitindo a hipótese (c), para cada matéria-prima temos uma restrição que pode ser expressa da seguinte forma:

- para a matéria-prima P_1 , $2x_1 + x_2 \leq 20$;
- para a matéria-prima P_2, $4x_1 \leq 32$;
- para a matéria-prima P_3, $x_2 < 10$.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Assim, é possível escrever o problema do seguinte modo:
"Encontre, se existir, o par (x_1, x_2), tal que a função, $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$, sujeita às restrições abaixo, assuma o maior valor possível "

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 20 \\
4x_1 \quad &\leq 32 \\
x_2 &\leq 10 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \quad \text{(hipótese } d\text{)},
\end{aligned}
$$

ou ainda max $(200x_1 + 300x_2)$, sujeito a

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 20 \\
4x_1 \quad &\leq 32 \\
x_2 &\leq 10 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

EXEMPLO 2

Um jovem pretende prestar um concurso público cujo exame envolve duas disciplinas, D_1 e D_2. Ele sabe que, para cada hora de estudo, pode obter 2 pontos na nota da disciplina D_1 e 3 pontos na nota de D_2 e que o rendimento é proporcional ao seu esforço.

Ele dispõe de no máximo 50 horas para os estudos até o dia do exame. Para ser aprovado deverá obter na disciplina D_1 no mínimo 20 pontos, na D_2, no mínimo 30, e o total de pontos deverá ser de pelo menos 70.

Como, além da aprovação, ele gostaria de alcançar a melhor classificação possível, qual a melhor forma de distribuir as horas disponíveis para o seu estudo?

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Sejam:
h_1 = n° de horas dedicadas à disciplina D_1 e

h_2 = n° de horas dedicadas à disciplina D_2.

Se, para cada hora de estudo, ele consegue 2 pontos para a disciplina D_1 , então em h_1 horas ele conseguirá $2h_1$ pontos. Analogamente, $3h_2$ para D_2. Assim, o número total de pontos será expresso pela função

$f(h_1, h_2) = 2h_1 + 3h_2$.

Como ele dispõe de apenas 50 horas de estudo, temos a restrição $h_1+h_2 \leq 50$.

As demais restrições são: para sua aprovação são:

$2h_1 + 3h_2 \geq 70$ (mínimo para a aprovação)

$2h_1 \geq 20$ (mínimo para a aprovação em D_1)

$3h_2 \geq 30$ (mínimo para a aprovação em D_2)

$h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$ (as notas são não-negativas).

Ou ainda:

$$\max\ (2h_1 + 3h_2), \text{ sujeito a}$$
$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &\leq 50 \\ 2h_1 + 3h_2 &\geq 70 \\ 2h_1 &\geq 20 \\ 3h_2 &\geq 30 \\ h_1 \geq 0,\ h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

EXEMPLO 3

Uma pessoa em dieta necessita ingerir pelo menos 20 unidades de vitamina A, 10 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C. Ela deve conseguir essas vitaminas a partir de dois tipos diferentes de alimentos: A_1 e A_2 . A quantidade de vitaminas que esses produtos contêm por unidade e o preço unitário de cada um deles estão expressos na seguinte tabela:

	Vit. A	*Vit. B*	*Vit. C*	*Preço unitário*
Alim. A_1	**4**	**1**	**1**	**R$30,00**
Alim. A_2	**1**	**2**	**—**	**R$20,00**

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Qual a programação de compra dos alimentos A_1 e A_2 que essa pessoa deve fazer para cumprir sua dieta, a menor custo possível?

Formulação do problema

Sejam:

x_1 = quantidade de alimento A_1;
x_2 = quantidade de alimento A_2;

Se uma unidade de alimento A_1 custa R$ 30,00, x_1 unidades custarão $30x_1$. Da mesma forma, x_2 unidades de A_2 custarão $20x_2$. Então, a função que exprime o custo total dos alimentos é:
$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Se uma unidade de alimento A_1 fornece 4 unidades de vitamina A, x_1 unidades fornecerão $4x_1$ unidades de vitamina A. Da mesma forma, o alimento A_2 fornecerá $1x_2$ unidades de vitamina A. Como devem ser ingeridas pelo menos 20 unidades dessa vitamina, podemos escrever a seguinte inequação:
$4x_1 + x_2 \geq 20$.

Analogamente, podemos escrever as restrições para a vitamina B, $x_1 + 2x_2 \geq 10$, e para a vitamina C, $x_1 \geq 2$.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Assim, o problema formulado como um problema de programação linear torna-se:

$$\min\ (30x_1 + 20x_2) \text{ sujeito a}$$
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1 \geq 0,\quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Voltemos à situação do exemplo 1:

Temos o seguinte *Problema de Programação linear* (PPL):

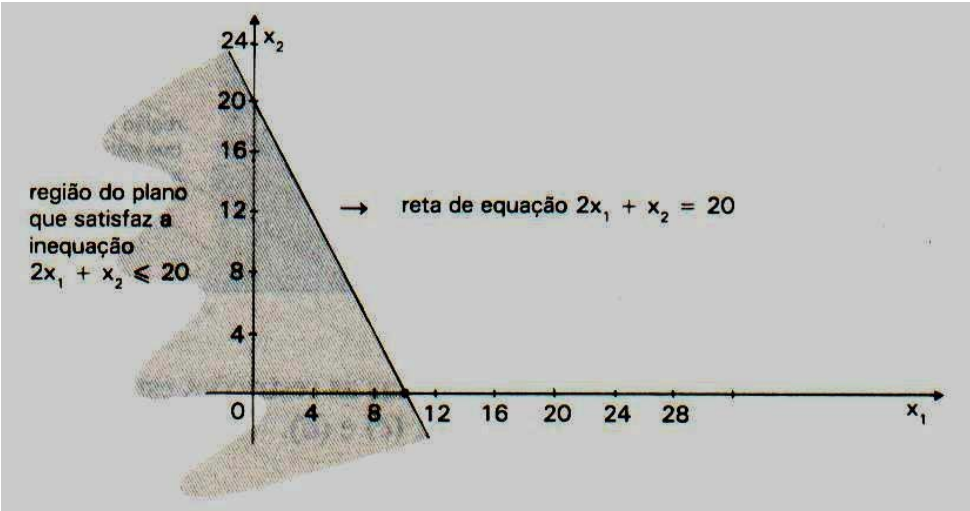
$$\max\ (200x_1 + 300x_2), \text{ sujeito a}$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 20 \\ 4x_1 &\leq 32 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vamos representar graficamente cada uma das restrições acima:

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

a) pontos que satisfazem a primeira inequação:

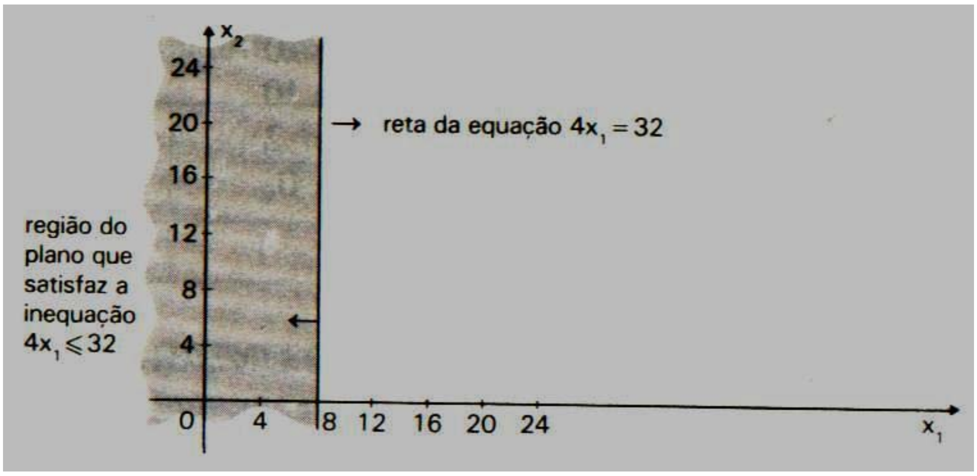
$2x_1 + x_2 \leq 20$;



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

b) pontos que satisfazem a segunda inequação:

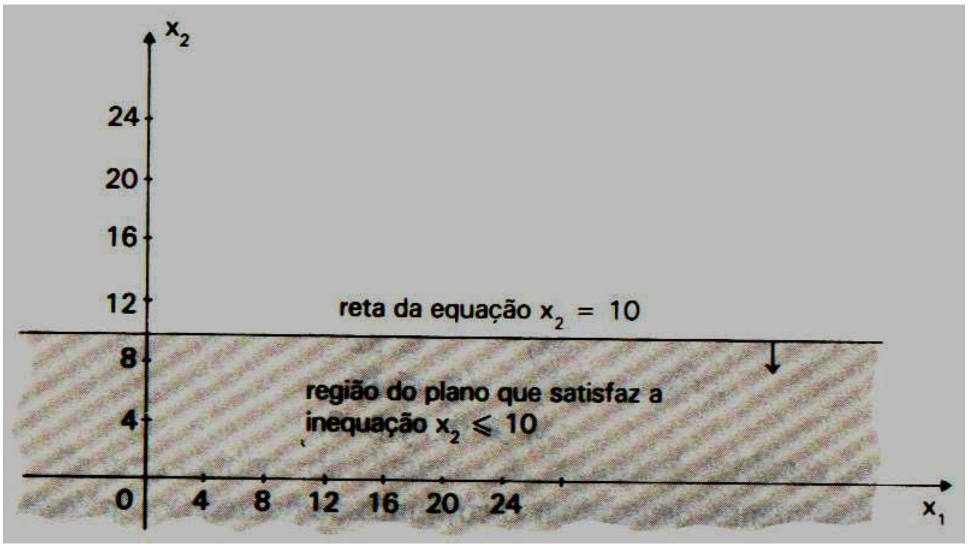
$4x_1 \leq 32$;



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

c) pontos que satisfazem a terceira inequação:

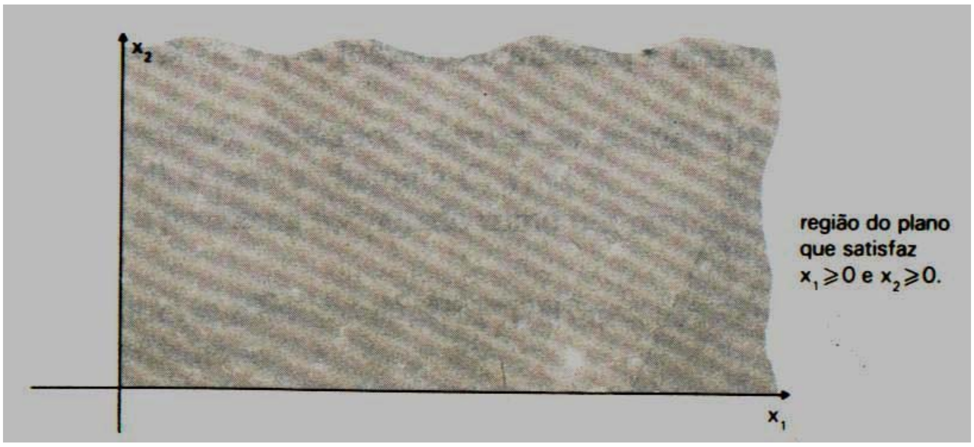
$x_2 \leq 10$;



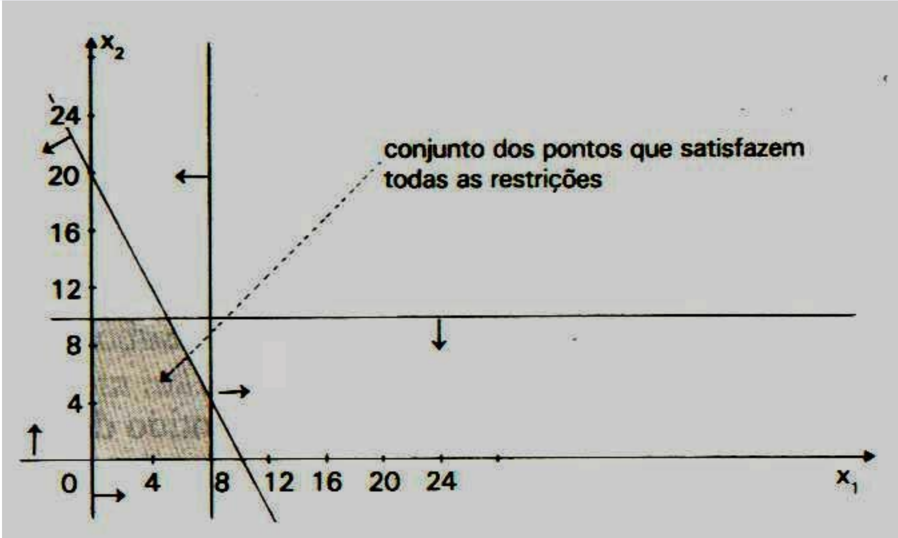
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

d) Pontos que satisfazem

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$;



Portanto, os pontos que satisfazem todas as restrições estarão na intersecção das regiões encontradas em (a), (b), (c) e (d):



As setas indicam o semiplano que satisfaz cada uma das restrições.
O conjunto de pontos que satisfazem todas as restrições é chamado de *região viável* ou *conjunto de pontos viáveis*.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

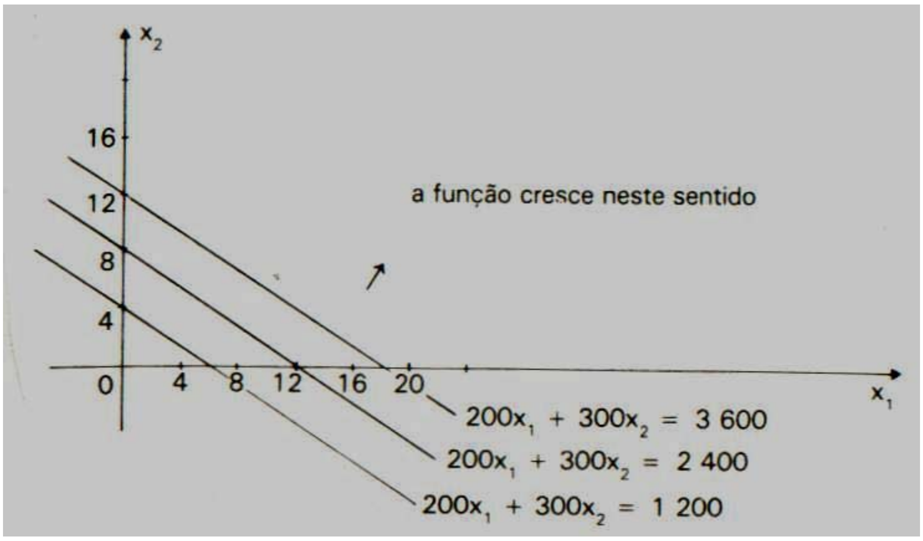
O problema, agora, se torna o seguinte:

"Determinar, se existir, um ponto (x_1, x_2) que pertence ao conjunto de pontos viáveis, de tal forma que a função $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$ assuma o maior valor possível".

Se estabelecermos alguns valores para a função $f(x_1, x_2)$, obteremos as suas *curvas de nível*. Assim, se por exemplo:

$200x_1 + 300x_2 = 3600$
$200x_1 + 300x_2 = 2400$
$200x_1 + 300x_2 = 1200$

as curvas de nível representadas no sistema de eixo cartesiano são da seguinte forma:



Observe que as curvas de nível são todas retas paralelas e que a função assume valor cada vez maior num determinado sentido.

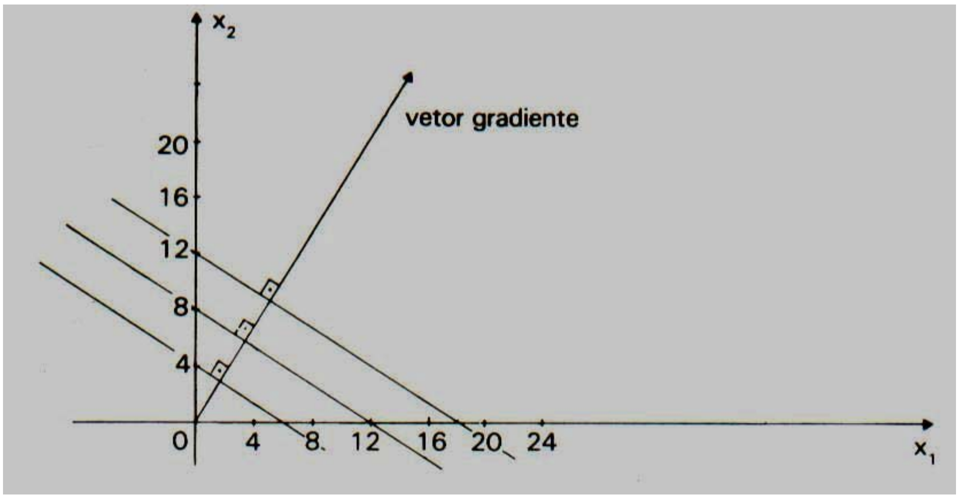
Prova-se, que as curvas de nível são perpendiculares ao *vetor gradiente* da função objetivo:

$f(x_1,x_2) = 200x_1 + 300x_2$

Suas coordenadas são os coeficientes da função:

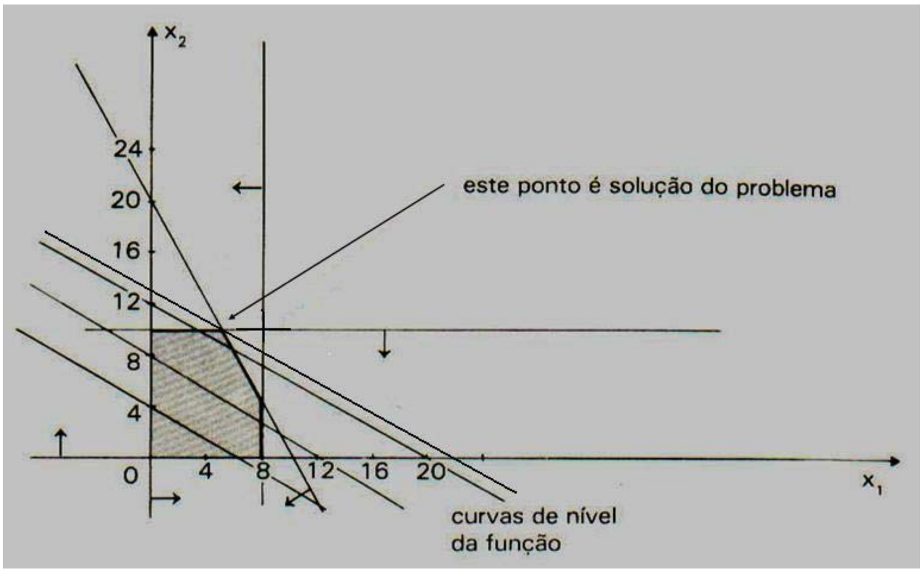
$$\left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = (200,300)$$

Além disso, o vetor gradiente nos fornece o sentido de crescimento da função:



Finalmente, podemos determinar uma solução para o problema, se existir:

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial



Como pode ser visto na figura, a curva de nível de maior valor dentro da região viável é a reta que passa pelo ponto de coordenadas $(x_1, x_2) = (5,10)$.

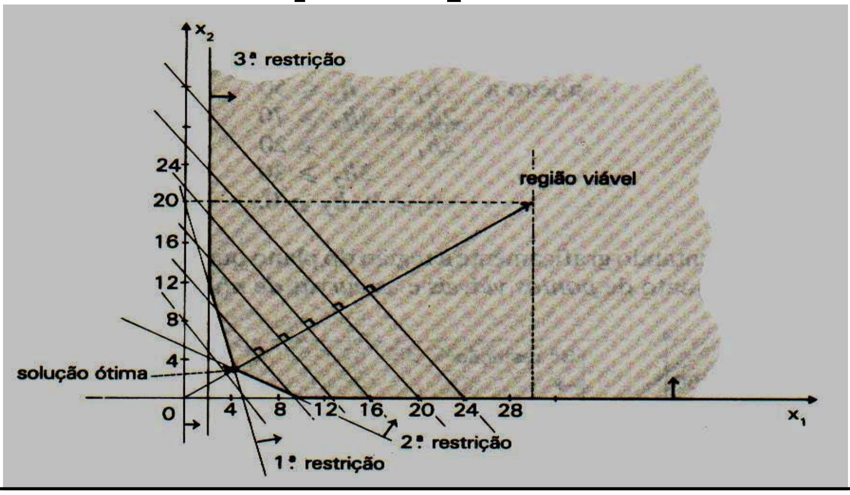
Dizemos que $(x_1, x_2) = (5, 10)$ é um *solução ótima*, e o valor da função $f(x_1, x_2) = 4000$ o *valor ótimo* do problema.

Lembrando que x_1 é a quantidade do produto A_1 a ser produzida e x_2, a do produto A_2, a resposta ao problema é:

Devem-se produzir 5 unidades do produto A_1 e 10 unidades de produto A_2 e a receita bruta máxima é R$ 4000,00

Vamos examinar a situação do exemplo 3:

$$
\begin{aligned}
\min\ (30x_1 + 20x_2) &\text{ sujeito a} \\
4x_1 + x_2 &\geq 20 \\
x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\
x_1 &\geq 2 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise:

Solução ótima: $(x_1, x_2) = (30/7; 20/7) = (4{,}29; 2{,}86)$
quantidade de alimentos:
A_1 - pelo menos 4 unidades
A_2 – pelo menos 2 unidades

Valor ótimo (custo mínimo):

$$C_{\min} = \frac{1300}{7} = 185{,}71$$

Observe que, como o problema é de mínimo, pesquisamos as curvas de nível no sentido oposto ao do gradiente.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Note que, tanto no exemplo anterior quanto neste, a solução ótima sempre coincide com algum ponto extremo da região viável.

Conclusão: Basta determinar o valor da função objetivo nos extremos da região, o ponto que produzir o maior (ou menor) valor será a solução ótima do modelo.

Os extremos são determinados a partir das interseções duas a duas das retas que determinam a região viável.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Vejamos mais um exemplo:

Um fabricante de móveis (mesas e cadeiras) deseja saber a quantidade de cada produto que deveria ser fabricada para produzir o maior lucro possível. Ele informa, ainda, que:

1.Na fabricação de cada mesa são consumidas 4 horas de marcenaria e 2 horas de acabamento, enquanto que cada cadeira consome 3 horas de marcenaria e 1 hora de acabamento para ser produzida;

2.Durante o período de produção considerado, o fabricante dispõe de 240 horas de marcenaria e de 100 horas de acabamento para serem utilizadas;

3.Na venda de cada mesa é obtido um lucro de R$ 7,00 e cada cadeira vendida dá um lucro de R$ 5,00.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Formulação do problema:

x_1 = número de mesas a serem produzidas
x_2 = número de cadeiras a serem produzidas

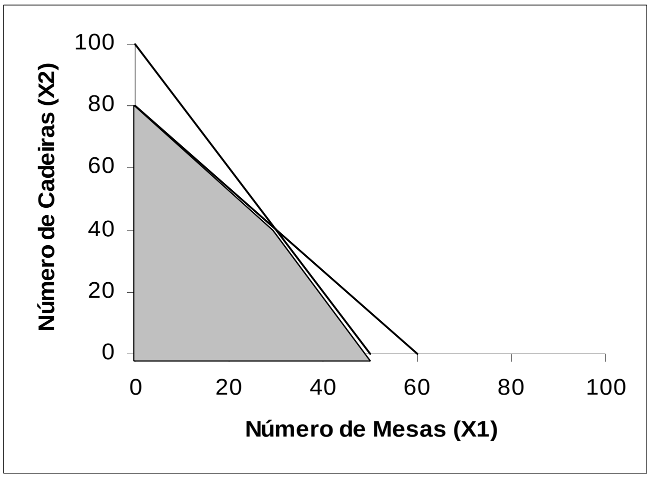
Dados do fabricante de móveis

Departamento	Tempo gasto na produção		Horas disponíveis
	MESA	CADEIRA	
Marcenaria	4	3	240
Acabamento	2	1	100
Lucro Unitário	R$ 7,00	R$ 5,00	

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

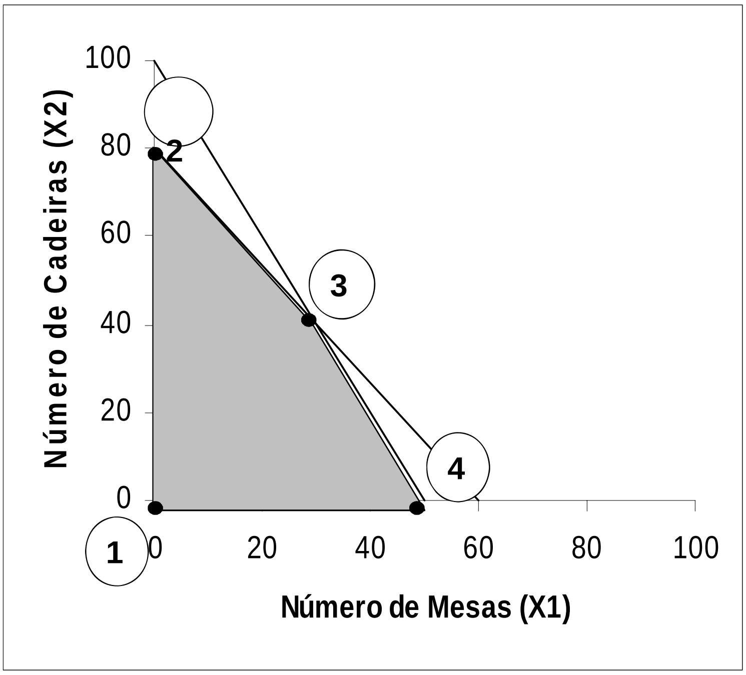
Analisando a tabela formulamos o seguinte PPL:

max $(7x_1 + 5x_2)$, sujeito a
$4x_1 + 3x_2 \leq 240$ (tempo de marcenaria disponível)
$2x_1 + x_2 \leq 100$ (tempo de acabamento disponível)
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (o número de unidades produzidas é não-negativo)



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Pontos extremos do modelo



Valores nos pontos extremos do modelo

Ponto	X_1	X_2	Função Objetivo
1	0	0	0
2	0	80	400
3	30	40	410
4	50	0	350

Logo, a solução ótima do modelo é aquela correspondente ao ponto 3

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

***EXEMPLO 5*:** Seja o problema

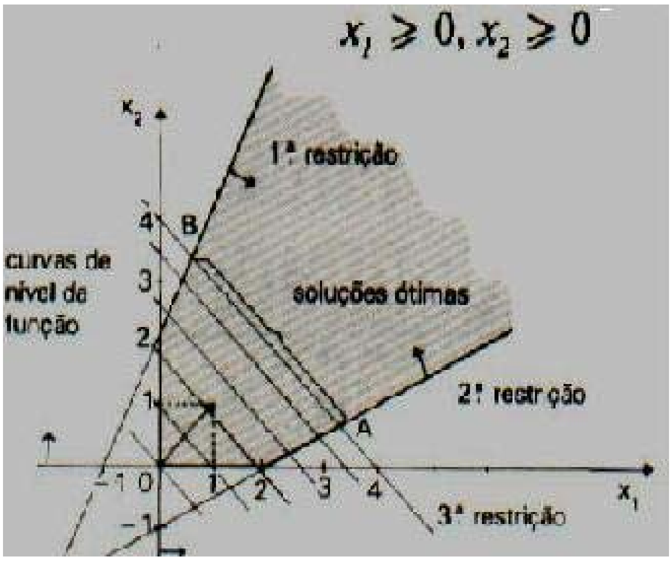
$\max(x_1 + x_2)$ sujeito a

$-2x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Problema 01

Uma empresa fabrica 5 produtos: P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5. cada um deles requer 3 tipos de matérias-primas: M_1, M_2 e M_3. as quantidades utilizadas por cada produto, as disponibilidades das matérias-primas e o lucro líquido de cada produto são dados na tabela abaixo:

Produtos / Matérias-primas	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	*Disponibilidade de matérias-primas*
M_1	2	5	3	2	1	100 unidades
M_2	3	1	4	7	2	80 unidades
M_3	6	2	3	1	4	150 unidades
Lucro líquido unitário	200	100	60	50	150	Unidades monetárias

Supondo que o lucro é proporcional à quantidade produzida (vendida), formule o problema como um problema de programação linear e determine a quantidade de cada produto que deve ser fabricada para que o lucro seja o máximo possível.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Problema 02

Uma fábrica tem 3 tipos de máquinas, M_1, M_2 e M_3, a serem utilizadas na fabricação dos produtos P1 e P2. O quadro abaixo descreve como a fábrica opera, diariamente:

Produtos / Máquinas	P_1	P_2	*Disponibilidade diária*
M_1	3	2	20h
M_2	4	0	12h
M_3	2	5	18h

Formule o problema como um problema de programação linear para planejar a produção diária a fim de que o lucro seja o máximo possível, sabendo que o produto P_1 dá lucro de R\$200,00 e P2, R\$50,00.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

LIMITAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. Coeficientes constantes:

Nos modelos estudados os coeficientes são considerados como constantes conhecidas. Contudo, deve-se analisar se os valores inicialmente definidos para tais constantes permanecem válidos para a solução apresentada.

2. Divisibilidade:

Os valores ótimos das variáveis de decisão são números reais, não necessariamente inteiros. Se uma variável é inteira (por exemplo: o número de cadeiras produzidas) não faz sentido pensá-la como um número fracionário. Nestas situações devemos impor tal condição ao modelo na forma de uma restrição.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

3. Proporcionalidade:

Nos modelos de programação linear apresentados, admitimos proporcionalidade em relação às variáveis de decisão na função objetivo. Nestes casos, devemos modelar o problema dividindo-o em intervalos onde tal proporcionalidade assuma valores que possam ser considerados válidos.

4. Aditividade:

Especifica que não há correlação entre as variáveis, ou seja, são independentes. Por exemplo, o lucro total de uma empresa sempre é a soma dos lucros de cada uma das atividades. No caso de produtos que concorrem entre si, para uma mesma faixa de consumidores, o aumento de vendas de um produto pode influenciar na demanda do outro.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Conclusão:

Apesar das limitações apresentadas, a programação linear é uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de problemas empresariais que envolvam análise quantitativa e têm por objetivo a obtenção do ponto ótimo de operação. Isto se deve à simplicidade que a hipótese de linearidade produz e ao fato de o modelo poder ser resolvido sem a necessidade de elevados conhecimentos matemáticos e de programação de computadores.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Na próxima unidade abordaremos a solução de problemas de otimização utilizando a planilha eletrônica EXCEL, através de diversas aplicações, tais como:

1. Aplicações em Marketing
   - 1.1 Problema de seleção de mídia
   - 1.2 Problema de pesquisa de mercado
2. Aplicações na Produção
   - 1.1 Problema de mix de produção
3. Aplicações em Finanças
   - 3.1 Problema de seleção de investimento
4. Aplicações em Transportes
   - 4.1 Problema de transporte de carga
5. Aplicações na composição de Produtos
   - 5.1 Problema de composição de matéria prima
   - 5.2 Problema de dieta

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Programação Linear
Aplicações

Prof. Dr. Luís Antonio Benedetti

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Problema 01

Uma empresa fabrica 5 produtos: P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5. cada um deles requer 3 tipos de matérias-primas: M_1, M_2 e M_3. as quantidades utilizadas por cada produto, as disponibilidades das matérias-primas e o lucro líquido de cada produto são dados na tabela abaixo:

Produtos / Matérias-primas	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	*Disponibilidade de matérias-primas*
M_1	2	5	3	2	1	100 unidades
M_2	3	1	4	7	2	80 unidades
M_3	6	2	3	1	4	150 unidades
Lucro líquido unitário	200	100	60	50	150	Unidades monetárias

Supondo que o lucro é proporcional à quantidade produzida (vendida), formule o problema como um problema de programação linear e determine a quantidade de cada produto que deve ser fabricada para que o lucro seja o máximo possível.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Problema 02

Uma fábrica tem 3 tipos de máquinas, M_1, M_2 e M_3, a serem utilizadas na fabricação dos produtos P1 e P2. O quadro abaixo descreve como a fábrica opera, diariamente:

Máquinas \ Produtos	P_1	P_2	*Disponibilidade diária*
M_1	3	2	20h
M_2	4	0	12h
M_3	2	5	18h

Formule o problema como um problema de programação linear para planejar a produção diária a fim de que o lucro seja o máximo possível, sabendo que o produto P_1 dá lucro de R$200,00 e P2, R$50,00.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Aplicações em Marketing

1.1 Problema de seleção de mídia

Um Cassino de Mar Del Plata tem um orçamento de $ 8.000 por semana para ser utilizado em propaganda local. Este valor deve ser distribuído entre quatro tipos de mídias: TV, Jornal, *Rádio (horário nobre)* e Rádio (à tarde). O objetivo do cassino é alcançar a maior audiência possível, através das várias formas de mídia. A tabela a seguir apresenta o número de jogadores potenciais alcançados pela propaganda em cada tipo de mídia. Mostra também o custo e o número máximo de anúncios que podem ser comprados por semana. Um contrato do cassino exige que pelo menos cinco propagandas por semana sejam feitas nas rádios. Para evitar concentração de mídia, a direção do cassino definiu um valor máximo de $ 1.800 a ser utilizado em propagandas de rádio.

Mídia	Audiência por anúncio	Custo por anúncio	Número máximo por semana
TV (1 minuto) (X_1)	5000	800	12
Jornal diário (página inteira) (X_2)	8500	925	5
Rádio (30 Segundos horário nobre) (X_3)	2400	290	25
Rádio (1 minuto à tarde) (X_4)	2800	380	20

max $(5000X_1 + 8500X_2 + 2400X_3 + 2800X_4)$, sujeito a

$X_1 \le 12$; $X_2 \le 5$; $X_3 \le 25$; $X_4 \le 20$

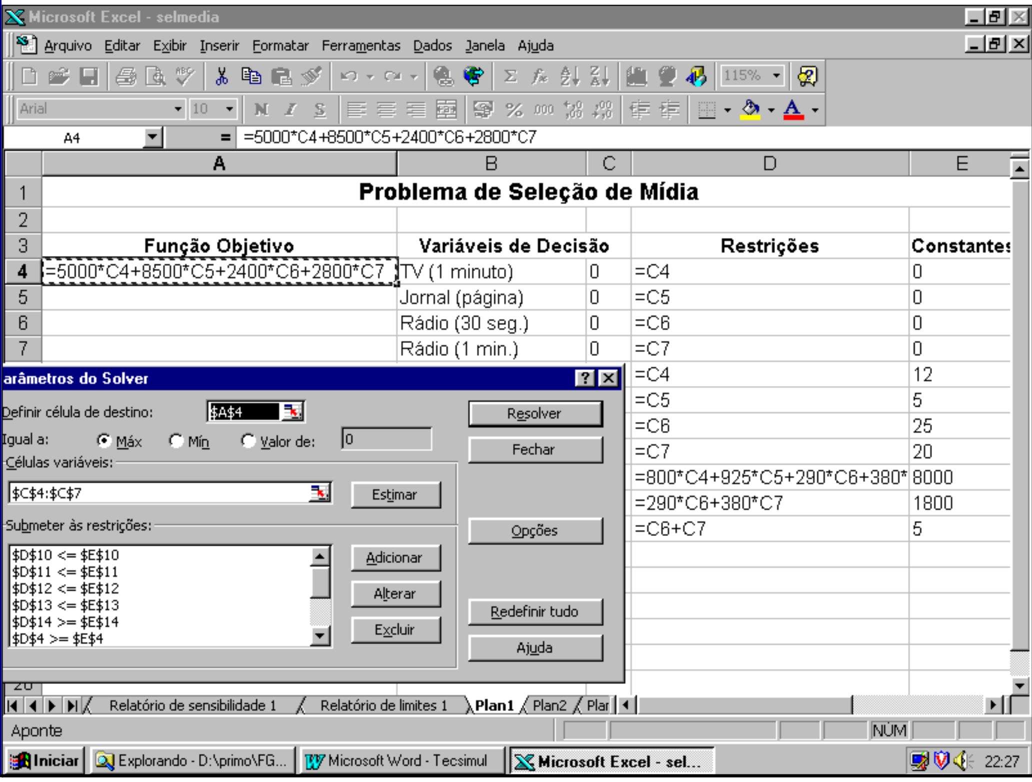
$800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 \le 8000$

$X_3 + x_4 \ge 5$

$290X_3 + 380x_4 \le 1800$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

solução deste problema utilizando o Excel 97



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

icrosoft Excel 8.0 Relatório de resposta
anilha: [selmedia.xls]Mídia
elatório criado: 02/04/2000 10:30:53

élula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$A$3	Função Objetivo	0	66900

élulas ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$C$3	TV (1 minuto)	0	2
$C$4	Jornal (página)	0	5
$C$5	Rádio (30 seg.)	0	6
$C$6	Rádio (1 min.)	0	0

Solução do Problema de Seleção de Mídia

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

1.2 Problema de pesquisa de mercado

Um Instituto de pesquisa está preparando uma pesquisa para um jornal de circulação no Estado de São Paulo. Para tornar as conclusões da pesquisa estatisticamente válidas, o cliente faz as seguintes exigências sobre a amostra a ser pesquisada:

- Pelo menos 2300 casas no Estado;
- Pelo menos 1000 casas onde o chefe da família tenha menos de 30 anos;
- Pelo menos 600 casas onde o chefe da família tenha entre 31 e 50 anos;
- Pelo menos 30% das casas em cidades com menos de 200 mil habitantes;
- Não mais do que 60% das casas em que o chefe tenha menos de 30 anos situadas em cidades com menos de 200 mil habitantes;
- Pelo menos 20% das casas onde o chefe tenha mais de 51 anos situadas em cidades com menos de 200 mil habitantes.

A pesquisa será realizada através de entrevista pessoal e os custos das entrevistas está mostrado na tabela a seguir. O objetivo do Instituto é minimizar os custos envolvidos com a realização da pesquisa, porém atendendo todas as exigências do cliente.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tabela de custos

Cidades	Custo por entrevista		
	Idade < 30	31 < idade < 50	Idade > 51
Mais de 200 mil habitantes	$7,50	$ 6,80	$ 5,50
Menos de 200 mil habitantes	$ 6,90	$ 7,25	$ 6,10

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

2. Aplicações na Produção

2.1 Problema de mix de produção

Um fabricante de periféricos para microcomputadores utiliza três equipamentos diferentes para testes dos produtos fabricados. A tabela a seguir mostra o tempo gasto, em minutos, para testar cada produto fabricado e o custo por hora de cada equipamento de teste.

Equip Teste	Modem Interno	Modem Externo	Placa de Vídeo	Floppy Disks	Hard Disks	Placa de Memória	Custo ($/hora)
1	7	3	12	6	18	17	15
2	2	5	3	2	15	17	12
3	5	1	3	2	9	2	18

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Os equipamentos de testes 1 e 2 estão disponíveis 120 horas por semana e o equipamento de teste 3 só pode ser usado 100 por semana. O mercado está em franca expansão e absorve tudo que for fabricado e testado. A tabela a seguir apresenta a receita e o custo de material para cada produto. Usando Programação Linear determine o mix de produção de periféricos deste fabricante que irá maximizar seus lucros.

Produto	Receita ($)	Custo de material ($)
Modem Interno	200	35
Modem Externo	120	25
Placa de Vídeo	180	40
Floppy Disk	130	45
Hard Disk	430	170
Placa de Memória	260	60

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

2.2 Problema de mix de produção

Uma conhecida fábrica de roupas masculinas produz diversas variedades de gravatas: uma, mais cara, de seda pura, uma mais barata, toda em polyester, e duas de preço médio, feitas de uma combinação de polyester e algodão. A tabela a seguir mostra o custo e a disponibilidade mensal dos três tipos de material utilizado.

Material	Custo por metro ($)	Material disponível por mês (metros)
Seda	21	800
Polyester	6	3000
Algodão	9	1600

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Esta fábrica possui contratos de fornecimento com várias lojas de departamentos, que garantem o fornecimento de uma quantidade mensal mínima e permitem que a fábrica aumente esta quantidade até um valor máximo de demanda mensal. A tabela a seguir mostra o preço, a demanda (mínima e máxima), a quantidade e o material necessário para a fabricação, de cada tipo de gravata. Os demais custos de produção são independentes do tipo de gravata fabricada

Tipo de Gravata	Preço de venda ($)	Quant. mínima mensal (m)	Quant. máxima mensal (m)	Material requerido por gravata (m)	Tipo de material requerido
Seda pura	6,70	6000	7000	0,125	100% seda
Toda Polyester	3,55	10000	14000	0,08	100% Poly.
Poly-Algodão 1	4,31	13000	16000	0,10	50%Poly-50%Alg.
Poly-Algodão 2	4,81	6000	8500	0,10	30%Poly-70%Alg.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

3. Aplicações em Finanças

3.1 Problema de seleção de investimento

Um ganhador da Mega Sena decidiu separar $ 5 milhões para investir no mercado, de maneira diversificada. Após analisar as diversas opções, escolheu quatro tipos de investimentos para aplicar sua pequena fortuna: Fundo Cambial, Fundo de Renda Fixa, Ações de Primeira Linha, Ações de Segunda Linha. Para evitar a concentração dos investimentos, ele resolveu limitar o volume de recursos a ser investido em cada modalidade. A tabela a seguir apresenta o rendimento anual médio dos últimos anos e o valor máximo a ser investido em cada tipo de investimento.

Tipo de Investimento	Rendimento Anual (%)	Valor máximo ($ milhões)
Fundo Cambial	7	1,0
Fundo de Renda Fixa	11	2,5
Ações de 1ª Linha	19	1,5
Ações de 2ª Linha	15	1,8

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

O investidor deseja maximizar o retorno dos investimentos, porém estabeleceu algumas condições para reduzir os riscos: ele definiu que no máximo 50 por cento dos recursos devem ser investidos em ações sendo que pelos 30 por cento do que for investido em ações deve ser investido em Renda Fixa e pelo menos 15 por cento do total devem ser investidos no Fundo Cambial. Utilizando Programação Linear como devem ser distribuídos os investimentos deste ganhador da Mega Sena ?

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

4. Aplicações em Transportes

4.1 Problema de transporte de carga

Uma empresa transportadora precisa decidir que carga transportar num caminhão, que tem capacidade de 10 toneladas. A tabela a seguir apresenta as cargas que estão esperando para serem carregadas, informando o valor do transporte e o peso. Cada item pode ser parcialmente carregado e o valor é proporcional ao peso transportado. O objetivo da empresa é maximizar o valor do transporte, respeitando a capacidade do caminhão. Como o caminhão deve ser carregado? Como deveria ser este carregamento se as cargas não pudessem ser parcialmente carregadas?

Carga	Valor ($)	Peso (kg)
1	22.500	7.500
2	24.000	7.500
3	8.000	3.000
4	9.500	3.500
5	11.500	4.000
6	9.750	3.500

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

5. Aplicações na composição de Produtos

5.1 Problema de composição de matéria prima

Uma Refinaria de petróleo produz dois tipos de gasolina para distribuição, Premium e Regular. Para produzir estes dois tipos são processados duas misturas de petróleo, X100 e X220. Cada mistura de petróleo difere da outra não só pelo custo por barril, como também pela composição química. A tabela a seguir indica o preço por barril e a porcentagem de dois ingredientes fundamentais para a fabricação das gasolinas, de cada tipo de mistura de petróleo.

Mistura de petróleo	Ingrediente A (%)	Ingrediente B (%)	Preço ($/Barril)
X100	35	55	15,00
X220	60	25	17,40

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

A demanda semanal da gasolina Premium é de 25.000 barris, enquanto a demanda da gasolina Regular é de 32.000 barris. Pelo menos 45% do conteúdo da gasolina Premium é do ingrediente A, e no máximo 50% do conteúdo da gasolina Regular é do ingrediente B. Considerando que cada barril de petróleo refinado produz 0,7 barris de gasolina, a refinaria deseja saber o volume semanal de cada mistura de petróleo que deve ser processado para minimizar os custos de produção.

Sejam

X1 = Barris da mistura X100 para produzir gasolina Premium

X2 = Barris da mistura X100 para produzir gasolina Regular

X3 = Barris da mistura X220 para produzir gasolina Premium

X4 = Barris da mistura X220 para produzir gasolina Regular

A função objetivo é minimizar os custos:

$\min (5000X_1 + 8500X_2 + 2400X_3 + 2800X_4)$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Sujeita às seguintes restrições:

$0,7X_1 + 0,7X_3$ ⌑ 25000 (demanda semanal de gasolina)

$0,7X_2 + 0,7X_4$ ⌑ 32000 (demanda semanal de gasolina)

$0,35X_1 + 0,60X_3$ ⌑ $(0,45)(0,70)(X_1 + X_3)$, ou seja

$0,035X_1 + 0,285X_3$ ⌑ 0 (ingrediente A na gasolina Premium)

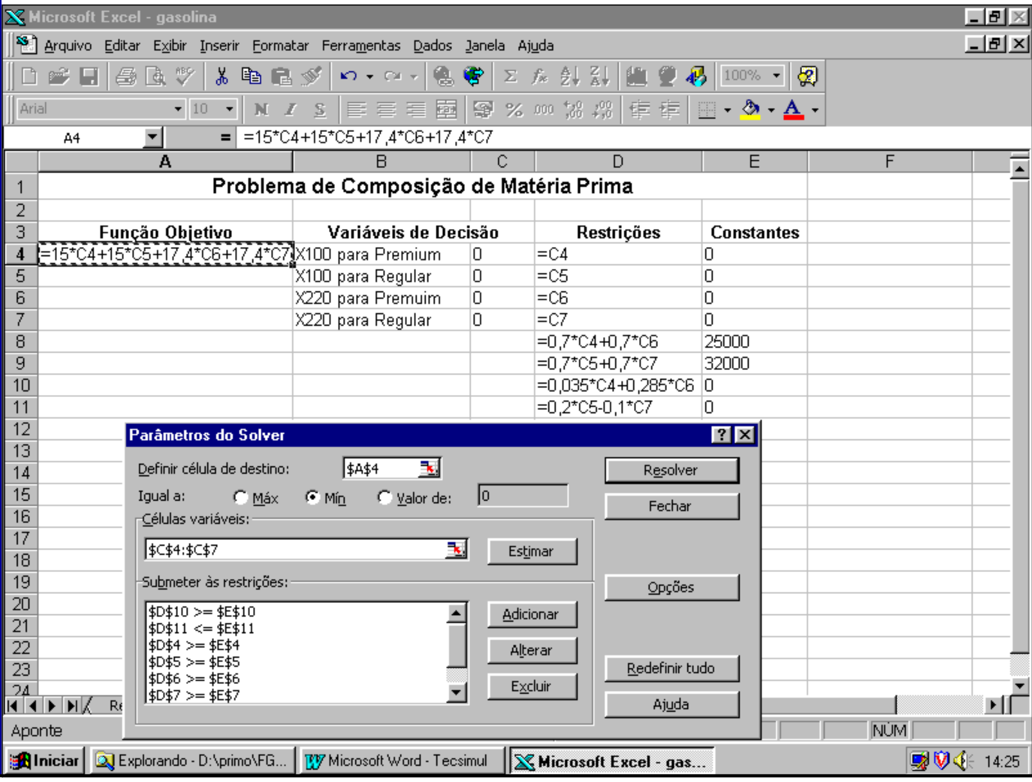
$0,55X_2 + 0,25X_4$ ⌑ $(0,50)(0,70)(X_2 + X_4)$, ou seja

$0,20X_2 - 010X_3$ ⌑ 0 (ingrediente B na gasolina Regular)

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3 \geq 0$; $X_4 \geq 0$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

solução deste problema utilizando o Excel 97



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta
Planilha: [gasolina.xls]Plan1
Relatório criado: 24/01/99 14:24:44

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$A$4	Função Objetivo	0	1294571

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$C$4	X100 para Premium	0	35714
$C$5	X100 para Regular	0	15238
$C$6	X220 para Premuim	0	0
$C$7	X220 para Regular	0	30476

Solução do problema de composição de matéria prima

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

5.1 Problema de dieta

Um fabricante de sucrilhos utiliza três tipos de cereais em grãos (A, B e C) para produzir seu produto. A propaganda desse fabricante garante que 125 gr do produto, misturadas num copo de leite contém as necessidades mínimas diárias de Proteína, Riboflavin, Fósforo e Magnésio, de uma pessoa adulta. A Organização Mundial da Saúde informa que as necessidades mínimas diárias de uma pessoa adulta são: 3 unidades de Proteína, 2 unidades de Riboflavin, 1 unidade de Fósforo e 0,425 unidades de Magnésio. A tabela a seguir mostra o custo e a quantidade de nutrientes presentes em cada um dos três tipos de grãos utilizados pelo fabricante.

Cereal	Custo ($/Kg)	Proteína (Un/Kg)	Riboflavin (Un/Kg)	Fósforo (Un/Kg)	Magnésio (Un/Kg)
A	0,33	22	16	8	5
B	0,47	28	14	7	0
C	0,38	21	25	9	6

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Utilizando Programação Linear, o fabricante deseja saber que quantidade de cada tipo de cereal deve ser utilizada na fabricação do sucrilho, para atender às recomendações da OMS e garantir a veracidade da sua propaganda, minimizando os custos de produção.

1. A FERRAMENTA SOLVER (EXCEL)

Diversas ferramentas para solução de problemas de otimização, comerciais ou acadêmicos, sejam eles lineares ou não, foram desenvolvidas. Dentre as ferramentas disponíveis, este curso se propõe a apresentar a ferramenta Solver, que acompanha o Microsoft Excel.

Apesar da ferramenta Solver poder ser utilizada também para problemas de programação não-linear, neste curso será apresentada apenas a sua utilização para a solução de problemas de programação linear. A utilização para outros tipos de problemas segue o mesmo padrão, sendo por isso intuitivo ao usuário o seu aprendizado.

1.1 Definindo e Resolvendo um Problema

Inicialmente, devemos definir o problema na planilha do Excel. Vamos resolver como exemplo o problema das rações.

"Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: *A* e *B*. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- A ração *A* utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a *B* utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
- O pacote de ração *A* custa R$ 11,00 e o pacote de ração *B* custa R$ 12,00;
- O kg de carne custa R$ 4,00 e o kg de cereais custa R$ 1,00;
- estão disponíveis por mês 10.000 kg de carne e 30.000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro."

Nosso problema deseja maximizar o lucro ($Z=11x_1+12x_2$) a partir da quantidade de ração *A* (x_1) e de ração *B* (x_2), sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 10000$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 30000$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Para definir o problema na planilha, devemos definir células para representar as variáveis de decisão e uma célula para representar o valor da função objetivo. Além disso, as restrições também devem ser definidas. Abra um novo arquivo no Microsoft Excel e siga os seguintes passos:

- na célula A1 digite " x_1";
- na célula B1 digite "0";
- na célula A2 digite " x_2";
- na célula B2 digite "0".

As células A2 e B2 guardarão os valores das variáveis de decisão $x1$ e $x2$, respectivamente.

Vamos agora definir a função objetivo. As equações do Excel são sempre precedidas do sinal de igualdade (=), que indica que nesta célula será efetuada uma conta. Preencha as células da planilha conforme indicado a seguir:

- na célula A4 digite "Função objetivo";
- na célula B4 digite "=11*B1+12*B2".

Na célula B4 será calculado automaticamente o valor da função objetivo, a partir da função fornecida.

Qualquer alteração nos valores das células B1 ou B2 fará com que o valor da função objetivo seja recalculado.

Serão definidas agora as restrições do problema: As células de restrição devem ser preenchidas da seguinte forma:

- na célula A6 digite "Restrições";
- na célula B6 digite "= B1+4*B2";
- na célula C6 digite "<=";
- na célula D6 digite "10000";
- na célula B7 digite "= 5*B1+2*B2";
- na célula C7 digite "<=";
- na célula D7 digite "30000";
- na célula B8 digite "=B1 ";
- na célula C8 digite ">=";
- na célula D8 digite "0";
- na célula B9 digite "=B2";
- na célula C9 digite ">=";
- na célula D9 digite "0".

Depois de preenchidas as células, a planilha deve estar igual à apresentada na Figura 1.

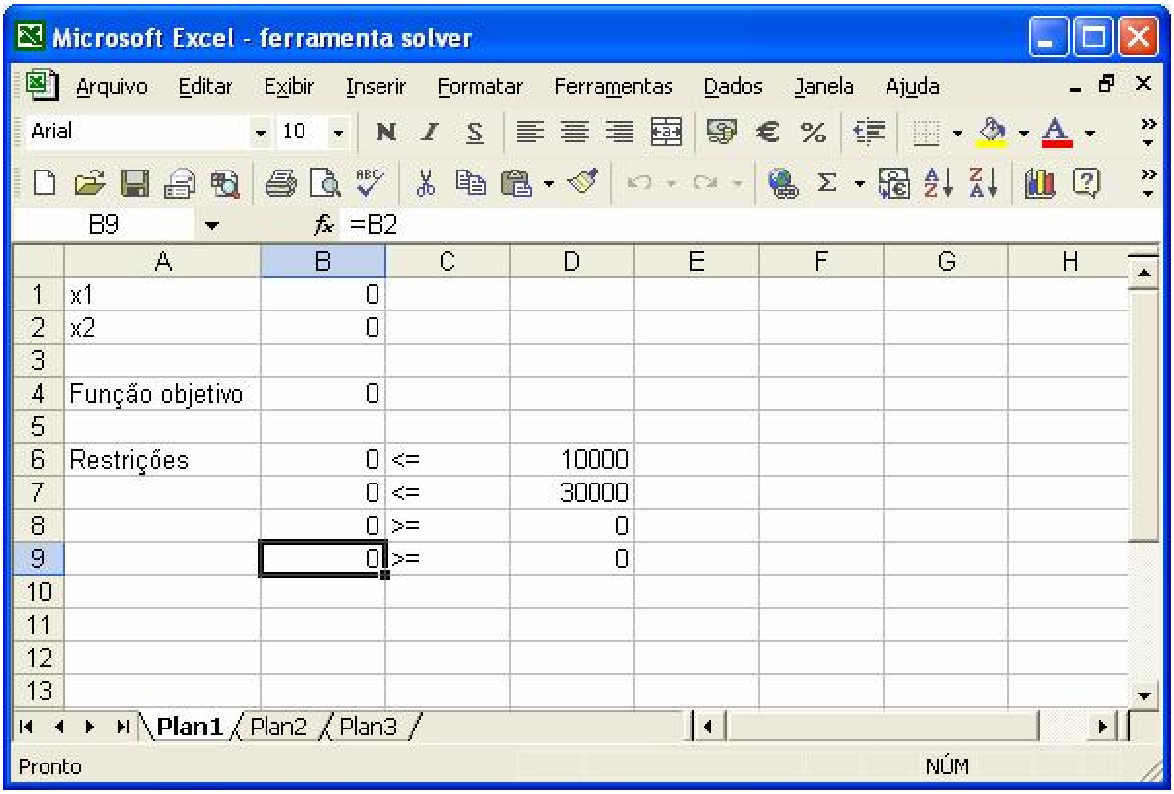


Figura 1 - Planilha com as células preenchidas para utilização da ferramenta Solver.

Para otimizar a função objetivo, vamos utilizar a ferramenta Solver.

. No menu Ferramentas, clique em Solver. A janela apresentada na Figura 2 se abrirá.

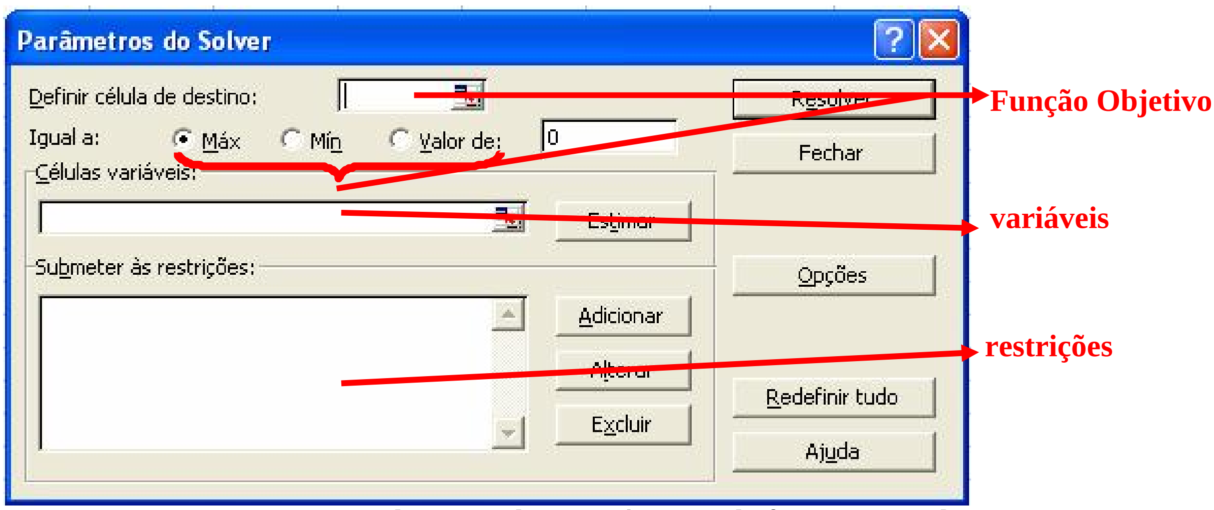


Figura 2 - Janela contendo os parâmetros da ferramenta Solver.

Para o Excel, tudo tem que estar em células: a função objetivo, as variáveis e as restrições. Para tanto, precisamos definir as células onde estarão as variáveis, e calcular a função objetivo e as restrições com fórmulas que usem estas células. Assim,

- Na caixa "Definir célula de destino", selecione a célula da função objetivo (B4) clicando sobre ela, ou simplesmente digite B4.
- Logo abaixo, é requerido que se escolha entre três opções: Máx, para maximizar a função objetivo, Mín, para minimizar a função objetivo, e Valor, que faz com que a função objetivo tenha determinado valor. No nosso exemplo, como queremos maximizar a função objetivo, escolheremos a opção Máx.
- Na caixa "Células variáveis", devem ser inseridas as células ajustáveis, que contêm os valores das variáveis de decisão. Deve-se inserir um nome ou uma referência para cada célula ajustável, separando as células não-adjacentes por ponto-e-vírgula. As células ajustáveis devem estar relacionadas direta ou indiretamente à célula que contém o valor da função objetivo. Podem ser especificadas até 200 células ajustáveis. Para que o Solver proponha automaticamente as células ajustáveis com base na célula de destino, clique em Estimar.
- Na caixa Submeter às restrições, devem ser inseridas as restrições do problema. Para inserir uma restrição, siga os seguintes passos:

  clique no botão "Adicionar". A janela apresentada na Figura 4 se abrirá;

  na caixa "Referência de célula", selecione a célula contendo a primeira restrição (B6);

  na caixa de seleção, escolha a opção que corresponde ao tipo de restrição, que pode ser menor ou igual (<=), maior ou igual (>=), igual (=), valor inteiro (núm) ou valor binário (bin). No nosso caso a opção a ser escolhida é <=;

  na caixa "Restrição", defina a célula que contém o valor limite da restrição, ou seja, D6;

  clique em OK para adicionar a restrição;

  repita estes passos até que todas as restrições estejam adicionadas.
- Após serem adicionadas as restrições, a janela deve estar igual à janela da Figura 3, exceto talvez pela presença dos cifrões ($), que indicam que a célula é fixa.

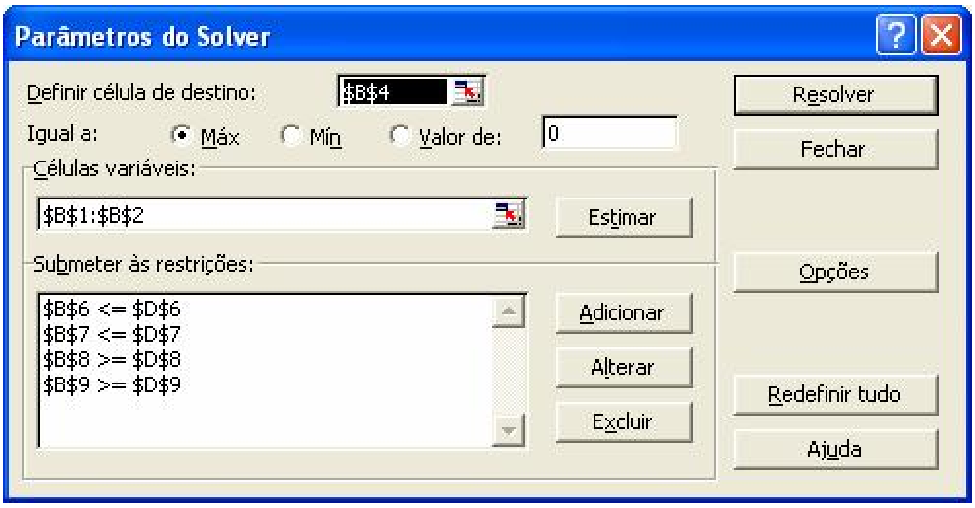


Figura 3 - Janela contendo os parâmetros da ferramenta Solver.

Figura 4 - Janela para adicionar restrições ao problema.

. Faltam apenas algumas opções (veja Figuras 5 e 6):

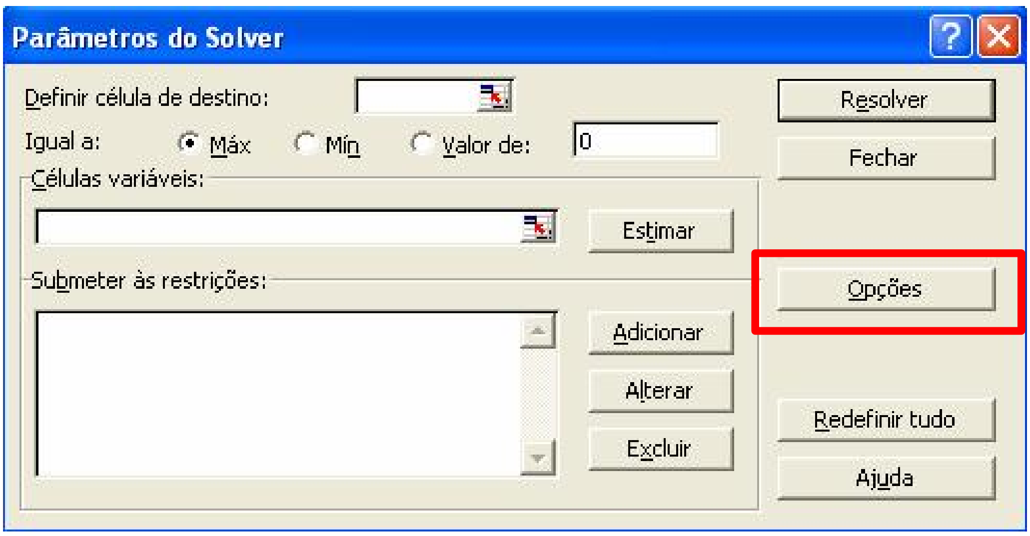


Figura 5 - Janela contendo os parâmetros da ferramenta Solver.

As opções do solver servem para controlar os métodos numéricos de aproximação. Como estamos resolvendo problemas lineares, é bastante assinalar os campos indicados. O campo de não negativos, se necessário (Figura 6).

Figura 6 - Opções do Solver.

. Para resolver o problema, clique no botão "Resolver". Se tudo estiver correto, a janela da Figura 7 será apresentada. Nesta janela, podemos escolher entre manter a solução encontrada pelo Solver ou restaurar os valores originais.

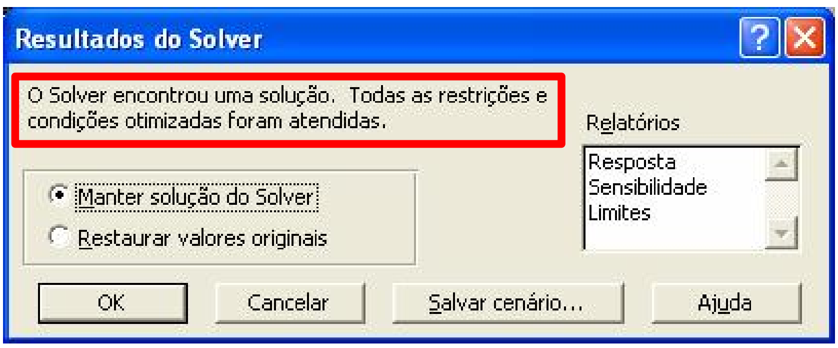


Figura 7 - Janela de resultados do Solver.

. Preste atenção nesta mensagem. Em caso de Solução Impossível ou Solução Ilimitada, ele relatará apenas aqui (Figuras 8 e 9).

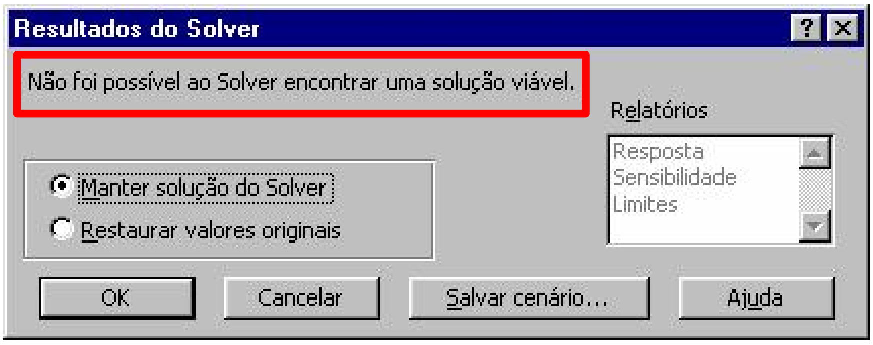


Figura 8 - Janela de resultados do Solver (solução impossível).

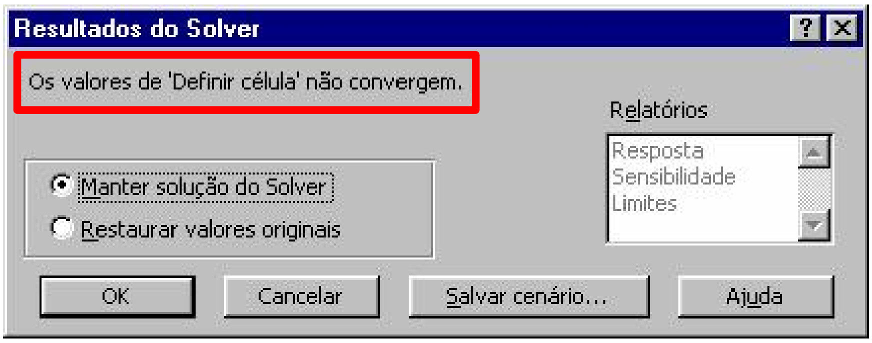


Figura 9 - Janela de resultados do Solver (solução ilimitada).

O processo de solução pode ser interrompido pressionando-se ESC. O Microsoft Excel recalculará a planilha com os últimos valores encontrados para as células ajustáveis.

Para o problema das rações a solução apresentada pelo Solver é:

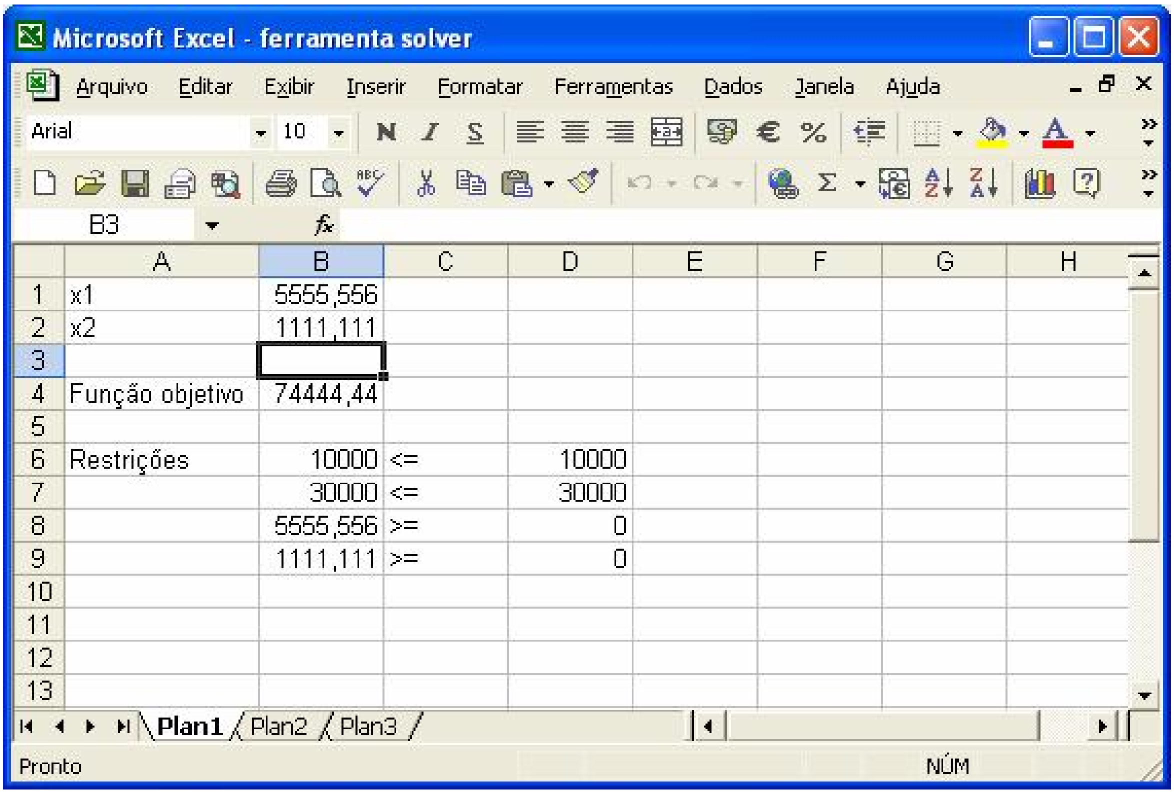


Figura 10 – Planilha do Excel com os resultados obtidos pelo Solver.

ou seja, a quantidade de ração *A* a ser produzida é de 5555,556 kg (célula B1, que corresponde ao valor da variável x_1) e a quantidade de ração *B* é de 1111,111 kg (célula B2, que corresponde ao valor da variável x_2) com um lucro de R$ 74444,44 (célula B4).

Também podemos selecionar relatórios, que contém informações sobre o processo de solução do problema (Figuras 11 e 12).

Figura 11 - Janela de resultados do Solver.

Microsoft Excel 10.0 Relatório de resposta
Planilha: [ferramenta solver.xls]Plan2
Relatório criado: 4/9/2006 14:00:54

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$4	Função objetivo	74444,44444	74444,44444

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$1	x1	5555,555556	5555,555556
$B$2	x2	1111,111111	1111,111111

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$B$6	Restrições	10000	$B$6<=$D$6	Agrupar	0
$B$7		30000	$B$7<=$D$7	Agrupar	0
$B$8		5555,555556	$B$8>=$D$8	Sem agrupar	5555,555556
$B$9		1111,111111	$B$9>=$D$9	Sem agrupar	1111,111111

Figura 12 - Relatório de respostas do Solver.

1.2 Instalando o Solver

Caso a opção Solver não esteja presente no menu Ferramentas, isto é porque a ferramenta Solver não foi instalada. Para instalá-la, proceda da seguinte maneira:

- No menu Ferramentas, clique em Suplementos. Se o Solver não estiver listado na caixa de diálogo Suplementos, clique em Procurar e localize a unidade de disco, a pasta e o nome de arquivo para o suplemento Solver.xla (geralmente localizado na pasta Biblioteca\Solver) ou execute o programa de instalação se não conseguir localizar o arquivo.
- Na caixa de diálogo Suplementos, marque a caixa de seleção Solver.

Os suplementos que você selecionar na caixa de diálogo Suplementos permanecerão ativos até que você os remova.

Exemplo: Uma fábrica que manufatura pisos (vendidos em caixas), revestimento para bancadas (vendido por medida linear) e revestimento para parede (vendido em placas), deseja planejar sua produção de modo a maximizar seu lucro. Os insumos utilizados na produção são vinil, betume, trabalho e máquina de corte. Os dados relevantes para o problema são dados na tabela abaixo:

	piso	Revest. bancada	Revest. parede	disponibilidade
Vinil(quilos)	30	10	50	1500
Betume(quilos)	5		3	200
Trabalho(homem/hora)	0,2	0,1	0,5	12
Máquina(maq/hora)	0,1	0,2	0,3	9
lucro	10,0	5,0	5,5	
Unidades	caixas	metro	placa	

Primeiramente, inserem-se os dados em uma planilha do Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Otimização da produção de pisos, revestimento de bancadas e de paredes								
2									
3	x =	quantidade de caixas de piso							
4	y =	quantidade de revestimento para bancada (em jardas)							
5	z =	quantidade de placas para revestimento de parede							
6									
7	Matriz de coeficientes					lado direito			
8		x	y	z					
9	vinil	30	10	50		1500			
10	betume	5	0	3		200			
11	trab	0.2	0.1	0.5		12			
12	máq.	0.1	0.2	0.3		9			
13									
14	lucro	10	5	5.5					

A seguir, definem-se as variáveis:

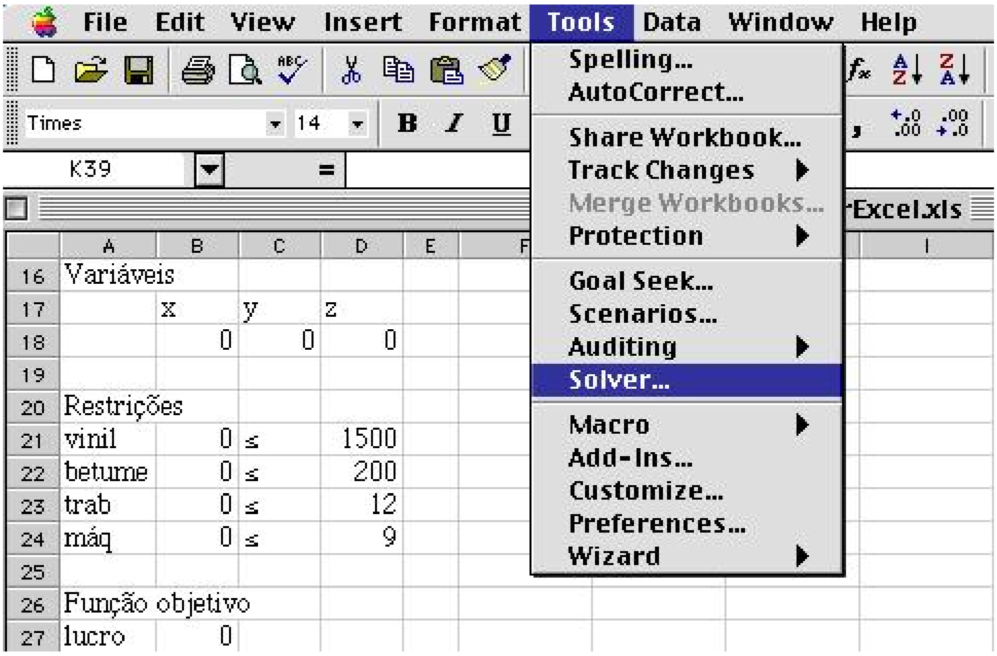
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
16	Variáveis								
17		x	y	z					
18		0	0	0					

os valores colocados nas células B18, C18 e D18 são arbitrários. Mais tarde indicaremos ao solver para escrever a solução nestas células. Abaixo mostramos a formulação:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
20	Restrições								
21	vinil	0	≤	1500					
22	betum	0	≤	200					
23	trab	0	≤	12					
24	máq	0	≤	9					
25									
26	Função objetivo								
27	lucro	0							

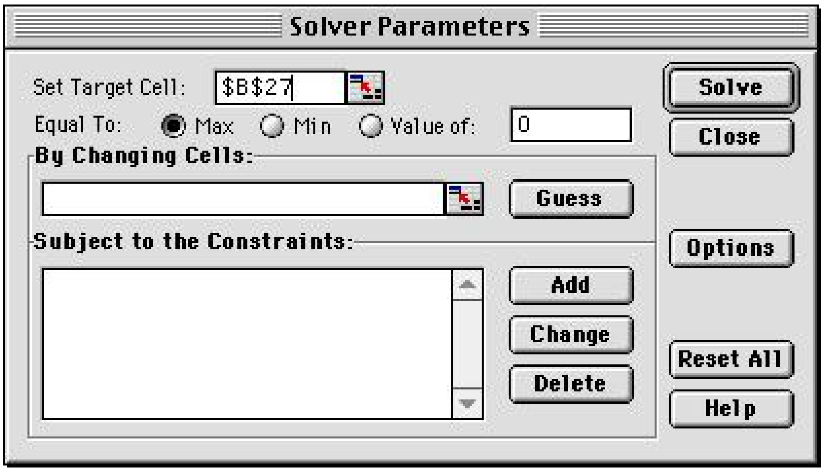
A célula B21, por exemplo, deve conter a expressão 30x+10y +50z. A função "SUMPRODUCT" do Excel fornece uma fórmula para tanto. O conteúdo da célula B21 é "=SUMPRODUCT(B9:D9,B$18:D$18)", ou seja, ela contém o produto interno da tripla nas células B9, C9 e D9, com a tripla nas células B18, C18 e D18. O conteúdo da célula D21 é “=F9”, a quantidade disponível de vinil. As demais células são preenchidas de forma análoga.

Para resolver o problema escolha “Solver” no menu “Tools”:

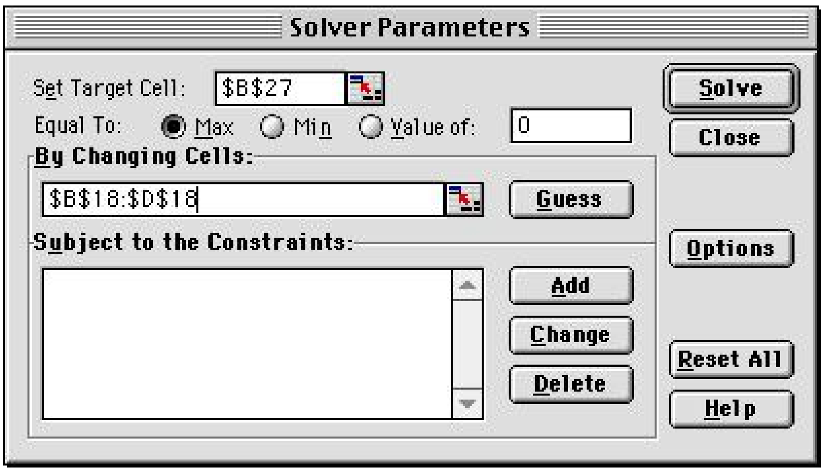


Agora é preciso:

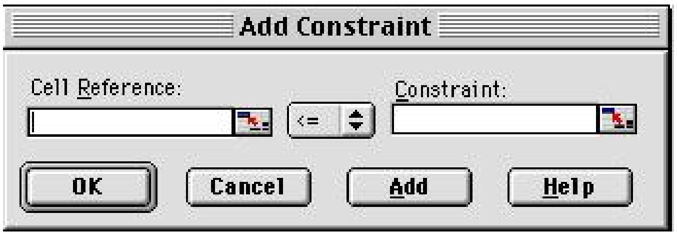
1. Indicar a célula que contém a função objetivo e informar se queremos maximizar, minimizar ou atingir valor pré-determinado:



2. Indicar as células que contém as variáveis:

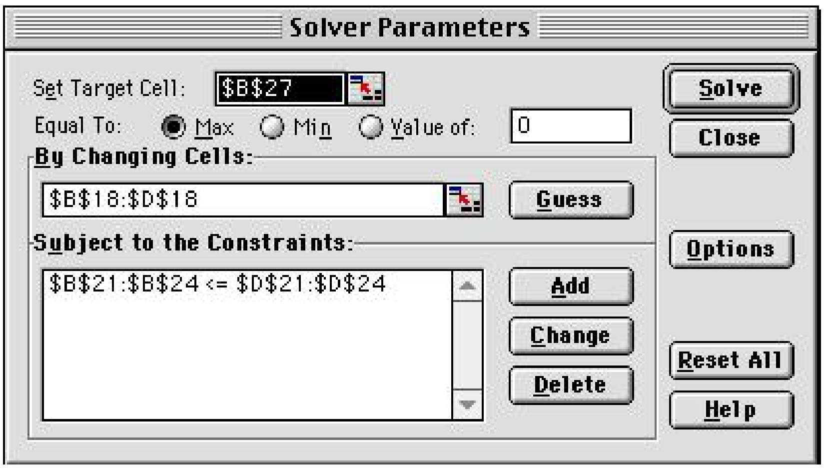


3. Informar as restrições: na área intitulada “Subject to the Constraints” clique no botão “Add”. Você verá:

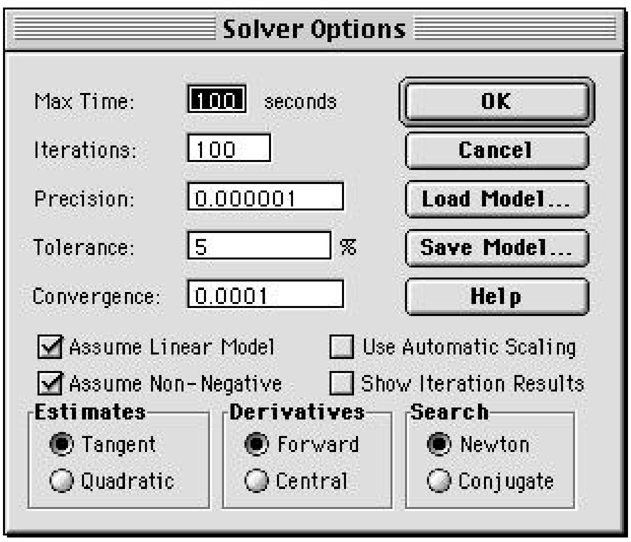


Como as expressões para as desigualdades já foram escritas em forma de coluna e são todas do tipo “≤”, podemos clicar no campo “Cell Reference” e colocar o trecho de coluna com as combinações lineares das variáveis e depois clicar no campo “Constraint”, colocando ali o trecho de coluna com o vetor lado direito:

Depois de clicar no botão “OK”, você verá a janela:



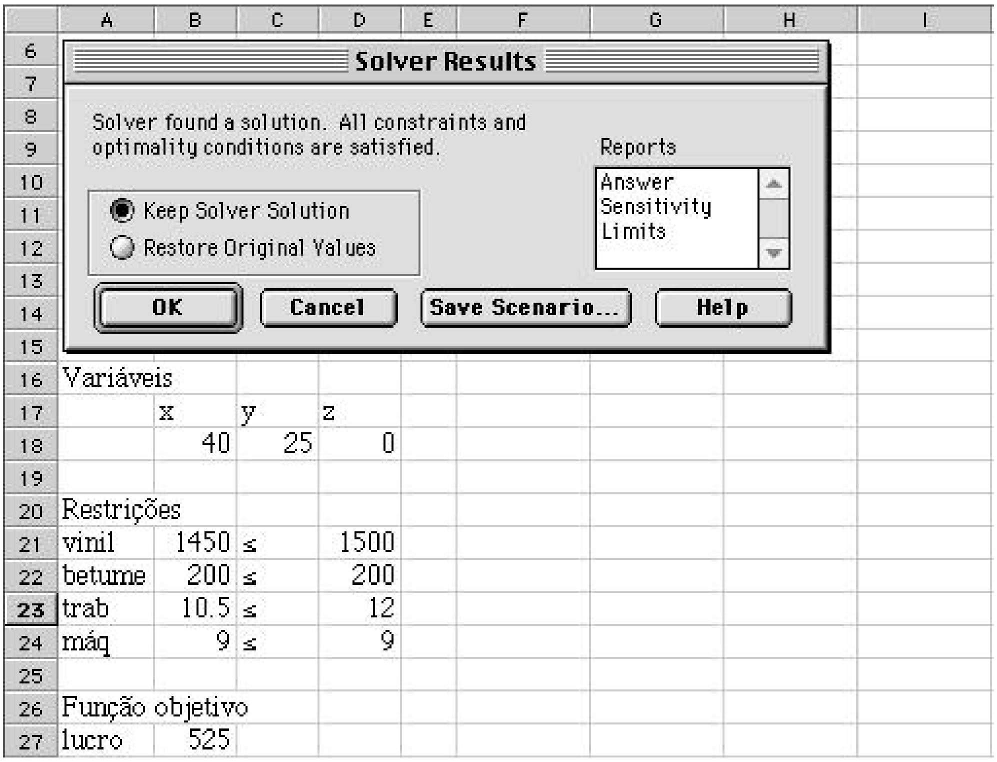
4. Finalizar a descrição do problema: clique no botão “Options” para terminar a especificação do modelo. Você deverá selecionar as opções “Assume Linear Model” (é um P.L.!) e “Assume Non-Negative” (as variáveis são não-negativas):



Quando tiver feito isso, clique no botão “OK”.

Volta-se assim à janela “Solver Parameters”, onde deve ser clicado o botão “Solve”.

O problema é resolvido, obtendo-se a janela mostrada na figura abaixo, que traz uma opção de produção de relatórios (reports) e de manter ou não a solução obtida pelo Solver (que já consta da planilha, nas células que continham os valores das variáveis):



Portanto a solução ótima é x = 40, y = 25 e z = 0, e o lucro ótimo é de 525. Note que podemos ler nas colunas contendo as restrições que na solução ótima a primeira (gasto de vinil) e a terceira restrições (gasto de mão-de-obra) estão folgadas.

Um Exemplo: A Colorado Cattle Company[1]

A Colorado Cattle Company (CCC) pode comprar três tipos de ingredientes de ração animal de um atacadista. O gado da empresa tem certas necessidades nutricionais em relação à gordura, proteínas, cálcio e ferro. Cada vaca exige, no mínimo, 10 unidades de cálcio, não mais que 7,5 unidades de gordura, no mínimo 12 unidades de ferro e 15 unidades de proteínas por dia. A tabela abaixo mostra a quantidade de gordura, proteínas, cálcio e ferro em cada libra dos três ingredientes de ração animal. A ração de classe 1 custa $ 0,25/libra, a de classe 2, $ 0,10/libra e a de classe 3, $0,08/libra. O gado pode ser alimentado com uma mistura dos três tipos de ração. A CCC gostaria de alimentar seu rebanho da forma mais econômica possível.

Dados da Colorado Cattle Company

	Ingredientes da Ração (Unidades por Libra)		
	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Cálcio	0,7	0,8	0
Ferro	0,9	0,8	0,8
Proteínas	0,8	1,5	0,9
Gordura	0,5	0,6	0,4

Um modelo de programação linear desse problema segue abaixo:

Considere classe1 = quantidade (em lb) da ração classe 1 a ser usada diariamente na alimentação de uma vaca
classe2 = quantidade (em lb) da ração classe 2 a ser usada diariamente na alimentação de uma vaca
classe3 = quantidade (em lb) da ração classe 3 a ser usada diariamente na alimentação de uma vaca

Minimize

0,25 classe1 + 0,1 classe2 + 0,08 classe3

sujeita a

$0{,}7\ \text{classe1} + 0{,}8\ \text{classe2} + 0\ \text{classe3} \geq 10$ (Cálcio)

$0{,}9\ \text{classe1} + 0{,}8\ \text{classe2} + 0{,}8\ \text{classe3} \geq 12$ (Ferro)

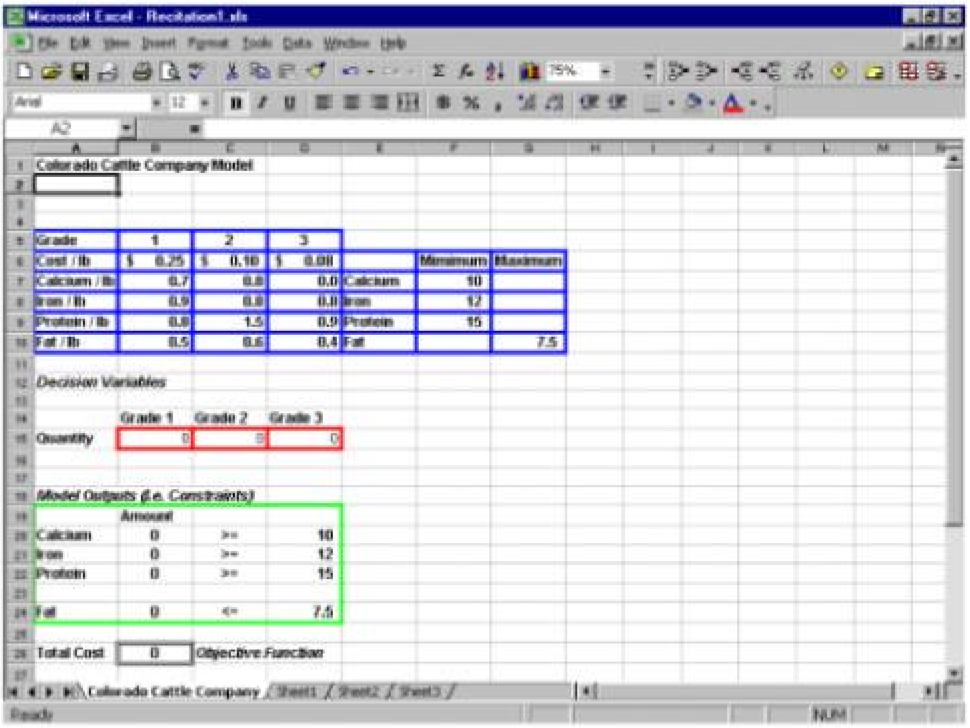
$0{,}8\ \text{classe1} + 1{,}5\ \text{classe2} + 0{,}9\ \text{classe3} \geq 15$ (Proteínas)

$0{,}5\ \text{classe1} + 0{,}6\ \text{classe2} + 0{,}4\ \text{classe3} \leq 7{,}5$ (Gordura)

$\text{classe1}, \text{classe2}, \text{classe3} \geq 0$

1 Esse problema está em ***Management Science, Modeling, Analysis and Interpretation***, de J.D. Camm e J.R. Evans, South-Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio, 1996.

Um modelo de planilha Excel desse cenário é mostrada a seguir


Microsoft Excel - Recitation1.xls

	A	B	C	D	E	F	G
1	Colorado Cattle Company Model						
2							
3							
4							
5	Grade	1	2	3			
6	Cost / lb	$ 0.25	$ 0.10	$ 0.08		Minimum	Maximum
7	Calcium / lb	0.7	0.8	0.0	Calcium	10	
8	Iron / lb	0.9	0.8	0.8	Iron	12	
9	Protein / lb	0.8	1.5	0.9	Protein	15	
10	Fat / lb	0.5	0.6	0.4	Fat		7.5
11							
12	*Decision Variables*						
13							
14		Grade 1	Grade 2	Grade 3			
15	Quantity	0	0	0			
16							
17							
18	*Model Outputs (i.e. Constraints)*						
19		Amount					
20	Calcium	0	>=	10			
21	Iron	0	>=	12			
22	Protein	0	>=	15			
23							
24	Fat	0	<=	7.5			
25							
26	Total Cost	0	*Objective Function*				

Colorado Cattle Company / Sheet1 / Sheet2 / Sheet3

As fórmulas das células nessa planilha ocorrerão todas na seção Saídas do Modelo (isto é, Restrições):

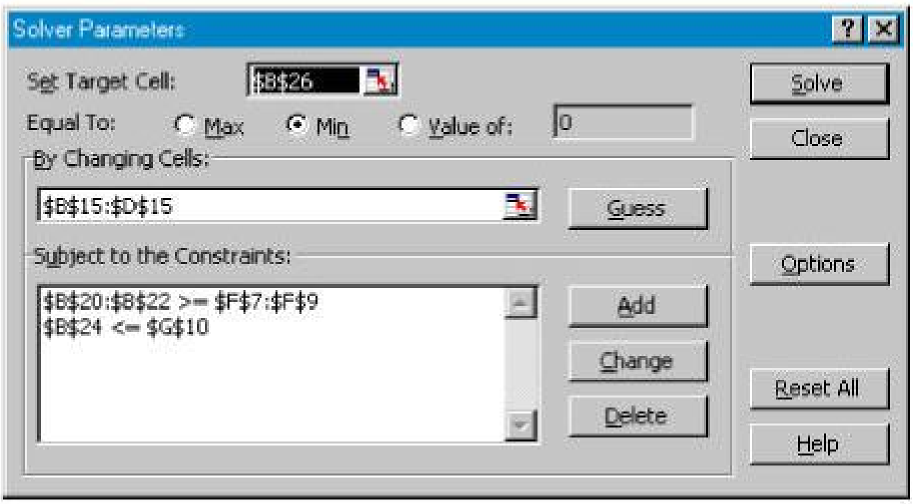
	A	B	C
18	*Model Outputs (I.e. Constraints):*		
19		Amount	
20	Calcium	=SUMPRODUCT(B7:D7,B15:D15)	
21	Iron	=SUMPRODUCT(B8:D8,B15:D15)	
22	Protein	=SUMPRODUCT(B9:D9,B15:D15)	
23			
24	Fat	=SUMPRODUCT(B10:D10,B15:D15)	
25			
26	Total Cost	=SUMPRODUCT(B6:D6,B15:D15)	

A função SUMPRODUCT efetua o produto escalar. Por exemplo, a quantidade de cálcio usada é SUMPRODUCT(B7:D7,B15:D15) = (B7*B15 + C7*C15 + D7*D15).

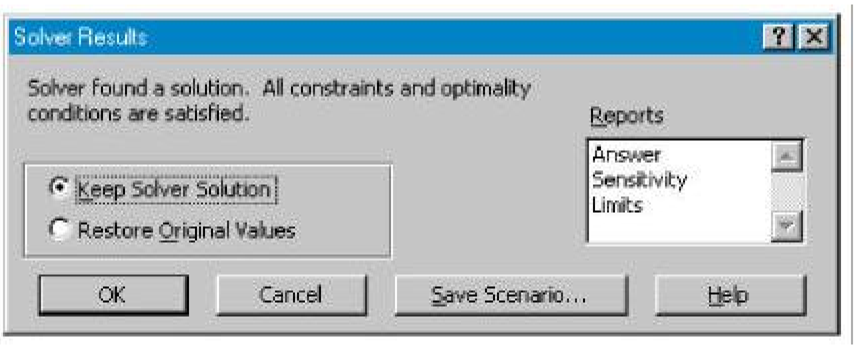
Os passos a seguir são utilizados para criar o modelo de LP mostrado abaixo:

1. Selecione Ferramentas e Solver.
2. Clique na caixa Definir célula de destino e insira B26.
3. Clique em Mín.
4. Clique na caixa Células variáveis e clique e arraste o mouse na planilha de B15 para D15 (ou digite B15:D15).
5. Clique no botão Adicionar para ativar a caixa Adicionar restrição.
6. Para inserir as restrições mínimas de necessidade: Na caixa Referência de célula, clique e insira B20:B22, selecione o tipo >= e, a seguir, clique na caixa Restrição e digite F7:F9. Clique em Adicionar.
7. Para inserir a restrição máxima permitida: Na caixa Referência de célula, clique e insira B24, selecione o tipo <= e, a seguir, clique na caixa Restrição e digite G10. Clique no botão OK.
8. Finalmente, selecione Opções, Presumir não negativos e Presumir modelo linear.

O modelo completo na caixa de diálogo Parâmetros do Solver é o seguinte:



Para resolver o modelo, clique no botão Resolver. Após a resolução do problema, a caixa Resultados do Solver será exibida



Você tem a opção de manter a solução encontrada pelo Solver na planilha ou restaurar os valores originais. Além disso, como mostrado na caixa Relatórios, três relatórios diferentes podem ser automaticamente gerados. Você pode selecionar qualquer um deles, clicando sobre os mesmo nessa caixa. Na próxima seção descreveremos cada um dos relatórios.

Relatórios do Solver

O Solver gera três relatórios para programas lineares: Relatório de Resposta, Relatório de Sensibilidade e Relatório de Limites. Se a opção Manter solução do Solver tiver sido selecionada na caixa de resultados do Solver, a solução ideal será mantida na própria planilha. Para o problema a Colorado Cattle Company, isso é mostrado a seguir.

O **Relatório de Resposta** fornece os valores original e final da Célula de Destino e de todas as Células Ajustáveis, bem como uma lista de cada restrição e seu status (nota: o termo Transigência descreve as variáveis de sobra e falta). O modelo do Relatório de Resposta para a Colorado Cattle Company é mostrado na próxima página. Observe que o EXCEL rotula a Célula de Destino, as Células Ajustáveis e as Restrições utilizando o primeiro texto encontrado à esquerda e acima de cada uma das células.

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta
Planilha: [CCC.XLS] CCC
Relatório criado: 12/11/97 08:33:07

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$26	Custo Total	0	2,59

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$15	Qtd Classe 1	0	8
$C$15	Qtd Classe 2	0	5,5
$D$15	Qtd Classe 3	0	0,5

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$B$20	Qtd. Cálcio	10	$B$20>=$F$7	Agrupar	0
$B$21	Qtd. Ferro	12	$B$21>=$F$8	Agrupar	0
$B$22	Qtd. Proteína	15,1	$B$22>=$F$9	Sem agrupar	0,1
$B$24	Qtd. Gordura	7,5	$B$24<=$G$10	Agrupar	0

O **Relatório de Sensibilidade** fornece o valor final de cada célula ajustável, seu custo reduzido, o coeficiente da função objetivo, o acréscimo e o decréscimo do coeficiente da função objetivo para o qual a solução atual permanecerá ótima (todo o resto é mantido fixo). Por exemplo, no Relatório de Sensibilidade da Colorado Cattle Company mostrado abaixo, o custo da classe 1 pode diminuir em até 0,1425 e a solução atual permanecerá como ideal. O preço-sombra para cada restrição (a variação na função objetivo por unidade de acréscimo no lado direito) é fornecido juntamente com o acréscimo e decréscimo do valor no lado direito para o qual o preço é válido. Por exemplo, no Relatório de Sensibilidade da Colorado Cattle Company mostrado abaixo, um acréscimo de 0,5 unidades na quantidade de gordura (o qual está dentro do acréscimo permitido de 1 na restrição) resultará em uma variação na função de objetivo de (0,5)x(-1,14) = -0,57.

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibi lidade
Planilha: [CCC.XLS] CCC
Relatório criado: 12/11/97 08:33:07

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$15	Classe 1 Qtd	8	0	0,25	1E+30	0,1425
$C$15	Classe 2 Qtd	5,5	0	0,1	0,162857143	1E+30
$D$15	Classe 3 Qtd	0,5	0	0,08	0,177142857	2,68

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$B$20	Cálcio Qtd	10	0,31	10	0,137931034	4
$B$21	Ferro Qtd	12	0,67	12	0,054794521	2
$B$22	Proteínas Qtd	15,1	0	15	0,1	1E+30
$B$24	Gordura Qtd	7,5	-1,14	7,5	1	0,016949153

O **Relatório de Limites** (mostrado abaixo para o Exemplo da Colorado Cattle Company) fornece os limites inferior e superior de cada célula ajustável, mantendo todas as outras células em seus valores atuais e satisfazendo as restrições. O relatório abaixo mostra que a solução para o Exemplo da Colorado Cattle Company é muito apertada (com duas das três células ajustáveis fixadas em seus valores de destino, a terceira tem limites inferior e superior iguais ao seu valor de destino).

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites
Planilha: [CCC.XLS] CCC
Relatório criado: 12/11/97 08:33:07

Célula	Nome Destino	Valor
$B$26	Custo Total	2,59

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$B$15	Classe 1 Qtd	8	8	2,59	8	2,59
$C$15	Classe 2 Qtd	5,5	5,5	2,59	5,5	2,59
$D$15	Classe 3 Qtd	0,5	0,5	2,59	0,5	2,59

Resolvendo Problemas de Inteiros e Não-Lineares

A resolução de modelos lineares de inteiros, modelos não-lineares e mesmo modelos de inteiros não-lineares é obtida por meio das mesmas técnicas previamente descritas. Para especificar uma restrição como inteiro, ative a caixa de diálogo Adicionar Restrição, selecione a célula ajustável em Referência de célula e selecione o tipo int (inteiro) (para variáveis binárias, selecione bin). Para modelos não-lineares, simplesmente não especifique Presumir modelo linear na caixa de diálogo Opções.

Exemplo de utilização do Solver

Para ilustrar a utilização do Solver na resolução de problemas de Programação Linear (PL) iremos usar como exemplo o problema de refinaria de petróleo. O modelo PL deste problema é o seguinte:

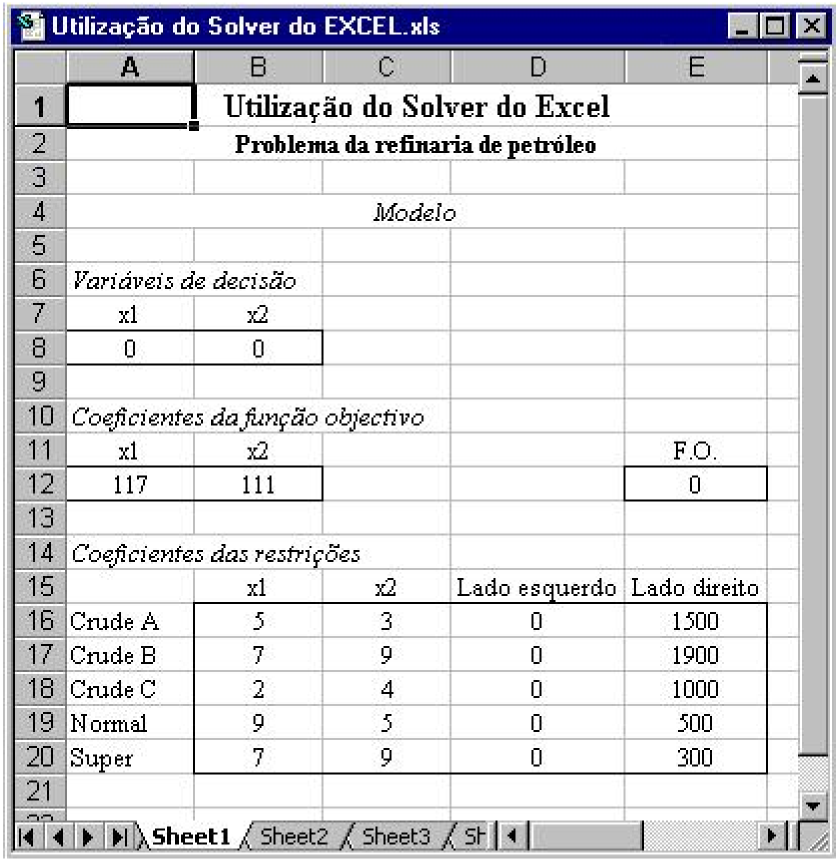
$$\text{Max LUCRO} = 117\, x_1 + 111\, x_2$$

$$\begin{aligned} \text{Suj. a:} \quad & 5\, x_1 + 3\, x_2 \leq 1500 \\ & 7\, x_1 + 9\, x_2 \leq 1900 \\ & 2\, x_1 + 9\, x_2 \leq 1000 \\ & 9\, x_1 + 5\, x_2 \leq 500 \\ & 7\, x_1 + 9\, x_2 \leq 300 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O primeiro passo consiste em criar uma folha de cálculo com a informação contida no modelo. Nessa folha de cálculo deveremos ter:

- As células onde serão colocados os valores das variáveis de decisão.
- Os coeficientes da função objetivo.
- A fórmula que relaciona estes coeficientes com as variáveis de decisão – a função objetivo propriamente dita.
- Os coeficientes da matriz das restrições.
- A fórmula que relaciona estes coeficientes com as variáveis de decisão – o lado esquerdo das restrições.
- As constantes que constituem o lado direito das restrições.

Na figura seguinte apresenta-se o aspecto de uma folha de cálculo com esta informação, mais texto adicional que apenas serve para nos ajudar a compreender o que está em cada célula e não tem qualquer função específica para o Solver.

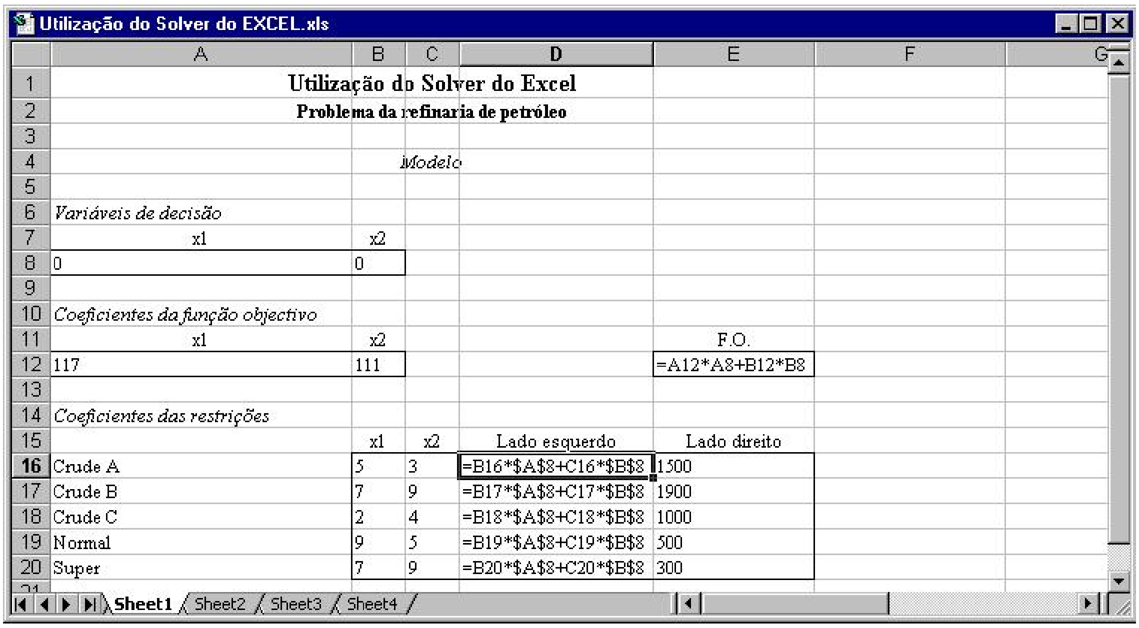


Utilização do Solver do EXCEL.xls

	A	B	C	D	E
1		Utilização do Solver do Excel			
2		Problema da refinaria de petróleo			
3					
4			*Modelo*		
5					
6	*Variáveis de decisão*				
7	x1	x2			
8	0	0			
9					
10	*Coeficientes da função objectivo*				
11	x1	x2			F.O.
12	117	111			0
13					
14	*Coeficientes das restrições*				
15		x1	x2	Lado esquerdo	Lado direito
16	Crude A	5	3	0	1500
17	Crude B	7	9	0	1900
18	Crude C	2	4	0	1000
19	Normal	9	5	0	500
20	Super	7	9	0	300
21					

Sheet1 / Sheet2 / Sheet3 / Sh

Algumas destas células contêm fórmulas, conforme se pode ver na figura seguinte:



Utilização do Solver do EXCEL.xls

	A	B	C	D	E	F
1	Utilização do Solver do Excel					
2	Problema da refinaria de petróleo					
3						
4			*Modelo*			
5						
6	*Variáveis de decisão*					
7	x1	x2				
8	0	0				
9						
10	*Coeficientes da função objectivo*					
11	x1	x2			F.O.	
12	117	111			=A12*A8+B12*B8	
13						
14	*Coeficientes das restrições*					
15		x1	x2	Lado esquerdo	Lado direito	
16	Crude A	5	3	=B16*$A$8+C16*$B$8	1500	
17	Crude B	7	9	=B17*$A$8+C17*$B$8	1900	
18	Crude C	2	4	=B18*$A$8+C18*$B$8	1000	
19	Normal	9	5	=B19*$A$8+C19*$B$8	500	
20	Super	7	9	=B20*$A$8+C20*$B$8	300	

Sheet1 / Sheet2 / Sheet3 / Sheet4

Construída esta folha de cálculo falta ainda definir o sentido da otimização (maximização ou minimização) e o tipo de restrições (tipo de desigualdade ou igualdade) e de variáveis.

Para isso já é necessário baixar a ferramenta Solver. Este "suplemento" do Excel não é instalado quando da instalação do Excel em modo típico ou mínimo. Apenas é instalada em modo completo ou personalizando a instalação.

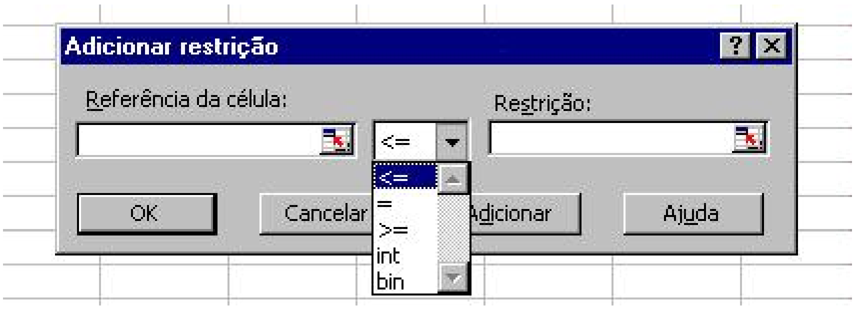
Em termos práticos três situações podem ocorrer:

- O comando "Solver..." está disponível no menu "Ferramentas" — o Solver está pronto a ser utilizado.
- O comando "Solver..." não está disponível no menu "Ferramentas". Deve-se chamar o comando "Suplementos..." desse mesmo menu.
  - Se aparecer a opção "Suplemento Solver" basta selecioná-la e o comando "Solver..." passará a estar disponível no menu "Ferramentas".
  - Se não aparecer esta opção é necessário alterar a instalação do Excel, usando o CD de instalação.

Invocando então o comando "Solver..." surge a seguinte caixa:

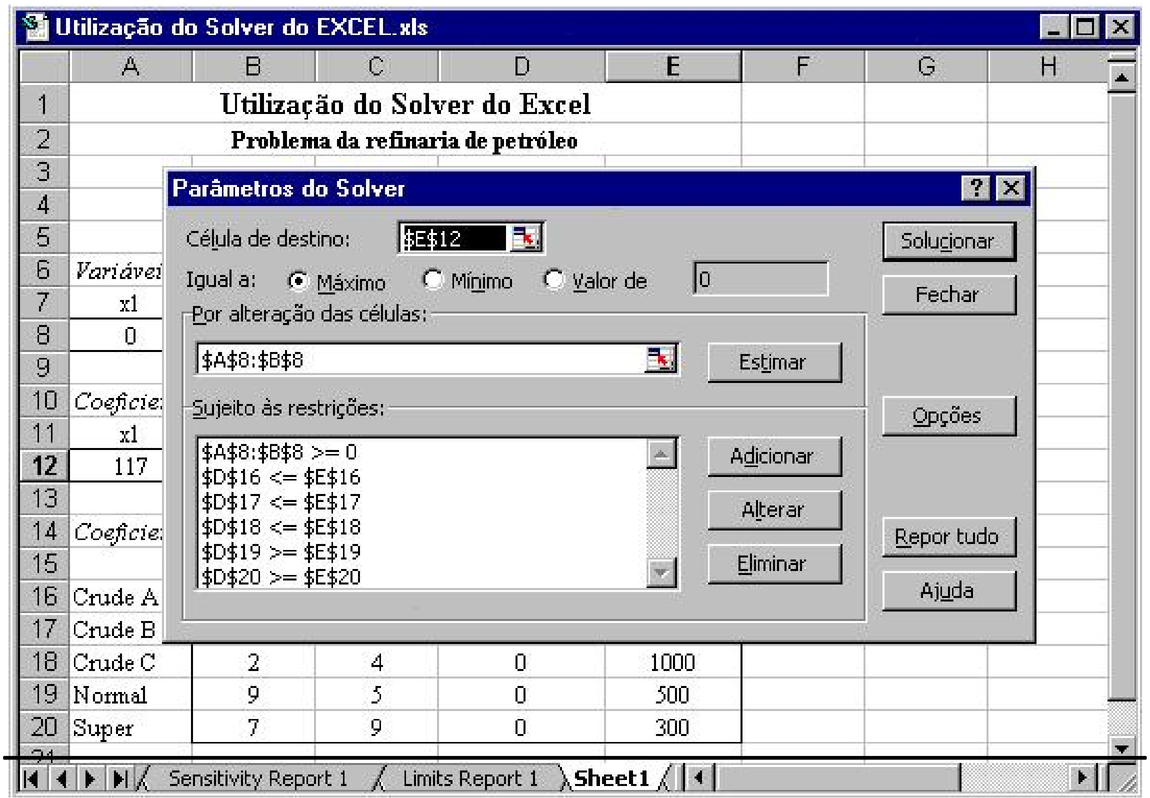
- Como célula de destino iremos indicar a localização da função objetivo.
- Seguidamente indicaremos o sentido da otimização, isto é, se se trata de um problema de maximização ou de minimização. A opção "Valor de" corresponde a encontrar os valores das variáveis de decisão que tornam a função objetivo o mais próxima possível do valor indicado, sendo portanto equivalente à minimização da diferença para esse valor.
- No campo "Por alteração das células" indicaremos a referência das células correspondentes às variáveis de decisão.

- As restrições serão introduzidas através do botão “Adicionar” que abre a seguinte caixa de diálogo:



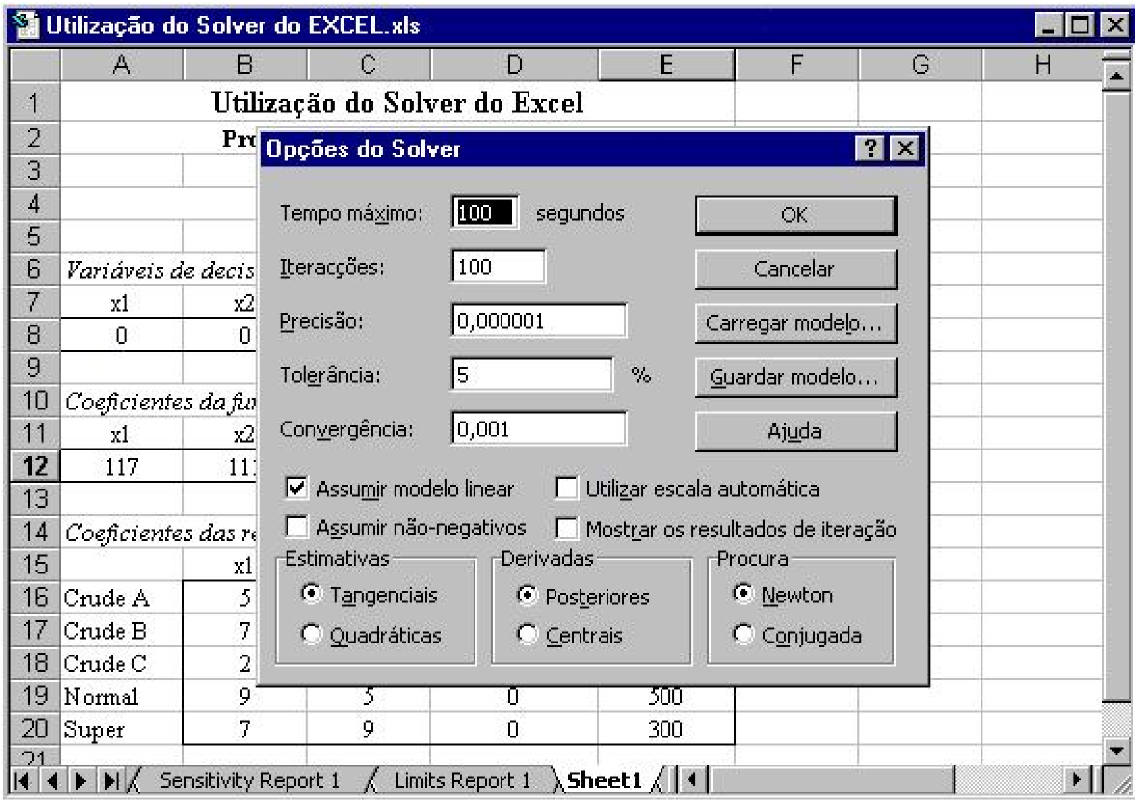
  - Na caixa “Referência da célula” introduz-se a referência da célula com o lado esquerdo da restrição.
  - Na caixa “Restrição” introduz-se a referência da célula com o lado direito da restrição. No menu do meio podemos selecionar o tipo de restrição em causa, isto é, se a restrição é de ≤, ≥ ou =. Também é aqui que se declaram as variáveis como inteiras ou binárias, isto quando o modelo que queremos resolver assim o exige, o que não é o caso deste exemplo que estamos a usar. Introduzidos os dados referentes a uma restrição pressionamos o botão “Adicionar”. Não esquecer de introduzir as restrições de não negatividade das variáveis (x_1, $x_2 \geq 0$).
  - Depois de termos adicionado sucessivamente todas as restrições terminamos pressionando o botão “Cancelar”.

Na figura seguinte encontra-se a tabela completamente preenchida:



É possível introduzir mais do que uma restrição de uma vez, usando as capacidades de "range" do Excel, desde que tenham o mesmo tipo de desigualdade. Por exemplo, em vez de introduzirmos as três restrições: $D$16 <= $E$16; $D$17 <= $E$17; $D$18 <= $E$18; podemos introduzir uma só da forma: $D$16:$D$18 <= $E$16:$E$18.

Antes de pressionar o botão "Solucionar" convém dar uma vista de olhos à caixa de diálogo correspondente ao botão "Opções":

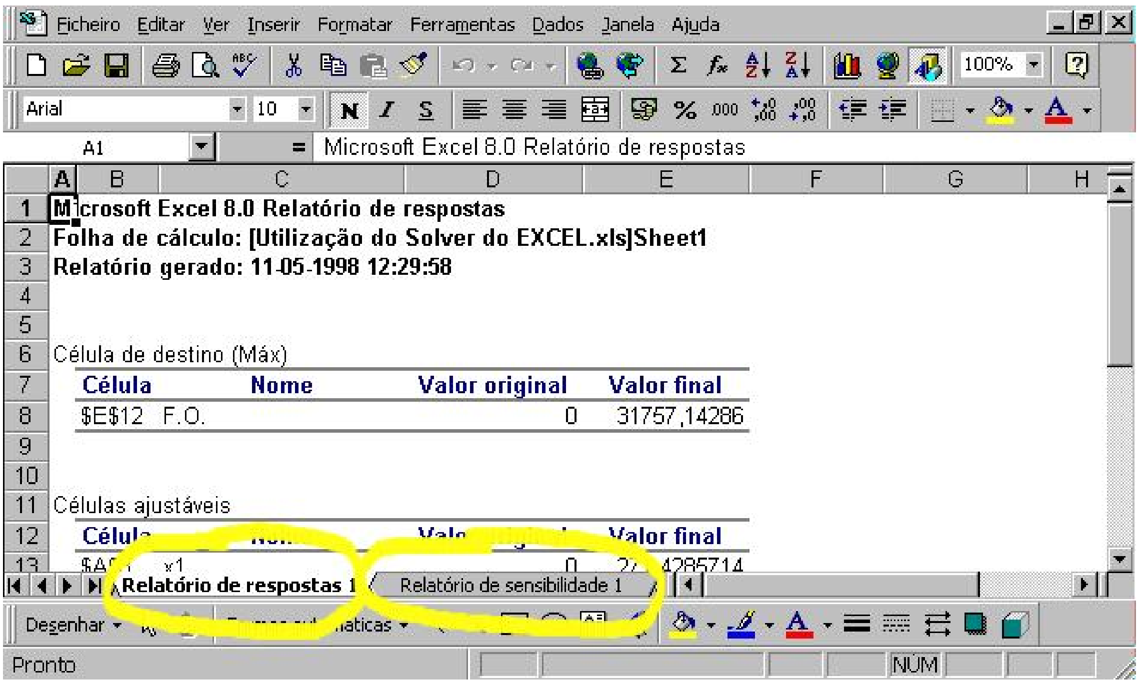


Para além da possibilidade de se guardarem modelos distintos para uma mesma folha de cálculo (um mesmo problema) nesta caixa é possível configurar vários parâmetros da resolução dos problemas. Para além daqueles cujo nome é óbvio, as escolhas do fundo ("Estimativas", "Derivadas" e "Procura") dizem respeito à Programação não Linear, que ultrapassa o âmbito deste manual. Para os problemas de PL é crucial verificar se a opção "Assumir modelo linear" esteja verificada.

Feitas as verificações finais pode-se passar à resolução do modelo através do botão "Solucionar".

Se a resolução correr bem, isto é, se não houver nenhum erro na folha de cálculo nem no modelo, surge o seguinte diálogo:

É muito importante ler a mensagem que surge no cimo da janela. Neste caso é-nos dito que o Solver encontrou uma solução que, como verifica todas as restrições e as condições de otimalidade, é a solução ótima. O Solver pode ainda gerar relatórios que analisam a solução encontrada. Eles são criados como "folhas" do mesmo "livro" onde estamos a trabalhar. Particularmente interessantes são os relatórios "Resposta" e "Sensibilidade". Vamos então selecionar esses dois relatórios e analisar o seu conteúdo.



Microsoft Excel 8.0 Relatório de respostas
Folha de cálculo: [Utilização do Solver do EXCEL.xls]Sheet1
Relatório gerado: 11-05-1998 12:29:58

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$E$12	F.O.	0	31757,14286

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$A$8	x1	0	271,4285714
$B$8	x2	0	0

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
$D$16	Crude A Lado esquerdo	1357,142857	$D$16<=$E$16	Não arquivar	142,8571429
$D$17	Crude B Lado esquerdo	1900	$D$17<=$E$17	Arquivar	0
$D$18	Crude C Lado esquerdo	542,8571429	$D$18<=$E$18	Não arquivar	457,1428571
$D$19	Normal Lado esquerdo	2442,857143	$D$19>=$E$19	Não arquivar	1942,857143
$D$20	Super Lado esquerdo	1900	$D$20>=$E$20	Não arquivar	1600
$A$8	x1	271,4285714	$A$8>=0	Não arquivar	271,4285714
$B$8	x2	0	$B$8>=0	Arquivar	0

Neste relatório é dada informação sobre a solução ótima (células ajustáveis) e o valor ótimo da função objetivo (Célula de destino). Neste caso x_1 = 271,4285714 e x_2 = 0, com F.O. = 31757,14286. Note-se que, como tivemos o cuidado de colocar nomes imediatamente por cima das células que continham as variáveis de decisão e a função objetivo, estas etiquetas surgem agora no relatório, tornando-o bastante mais legível.

No que diz respeito às restrições é de salientar a informação sobre a distância a que, na solução ótima, estamos do limite da restrição. Por exemplo, apenas temos 1500 barris de crude A disponíveis. No entanto estamos a gastar apenas 1357,142857 o que dá uma folga de 142,8571429. Isso significa que esta restrição não está ativa, isto é, o vértice correspondente à solução ótima não se encontra sobre esta restrição (o mal traduzido “Não arquivar” da coluna “Estado”). O mesmo não se pode dizer da restrição em relação ao crude B que é totalmente gasto. Uma análise semelhante se pode fazer relativamente às restrições de $\geq$. O não estarem ativas significa que as quantidades associadas a essas restrições estão acima daquilo que era exigido.

O segundo relatório faz análise de sensibilidade à solução ótima, isto é, analisa como podem variar as constantes do problema, nomeadamente os coeficientes da função objetivo e os lados direitos das restrições, sem que a solução ótima sofra alterações substanciais. Esta análise baseia-se na teoria do método simplex, pelo que se as variáveis forem inteiras (o problema não pode ser resolvido diretamente pelo método simplex) este relatório não está disponível pois não tem qualquer significado.

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade
Folha de cálculo: [Utilização do Solver do EXCEL.xls]Sheet1
Relatório gerado: 11-05-1998 12:29:58

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objectivo Coêficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$A$8	x1	271,4285714	0	117	1E+30	30,66666667
$B$8	x2	0	-39,42857143	111	39,42857143	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$D$16	Crude A Lado esquerdo	1357,142857	0	1500	1E+30	142,8571429
$D$17	Crude B Lado esquerdo	1900	16,71428571	1900	200	1511,111111
$D$18	Crude C Lado esquerdo	542,8571429	0	1000	1E+30	457,1428571
$D$19	Normal Lado esquerdo	2442,857143	0	500	1942,857143	1E+30
$D$20	Super Lado esquerdo	1900	0	300	1600	1E+30

No primeiro quadro (Células ajustáveis) analisam-se os coeficientes da função objetivo. A seguir à repetição do valor das variáveis na solução ótima apresentam-se os custos marginais (na coluna “Reduzido Custo”) das variáveis. Como estamos na solução ótima de um problema de maximização eles apenas poderiam ser negativos ou nulos. Em seguida apresenta-se o valor do coeficiente da variável na função objetivo e o máximo aumento e máxima diminuição admissíveis. Admissíveis em que sentido? Sem que $x_1 = 271,4285714$ e $x_2 = 0$ deixem de ser a solução ótima. É evidente que ao alterar um coeficiente na função objetivo o valor desta se altera, mesmo mantendo o valor das variáveis. Mas o que estamos analisando é, no fundo, como podemos variar a inclinação do plano que representa a função objetivo sem que a solução ótima salte para outro vértice. Tomando como exemplo a variável x_1, o coeficiente pode variar entre 117 – 30,6667 e 117 + ∞ sem que haja alteração da solução ótima.

No segundo quadro (“Restrições”) é feita uma análise de sensibilidade ao valor do lado direito das restrições. Ao alterar um destes valores estamos a alterar uma restrição e consequentemente a região admissível do problema. Isso poderá ter como conseqüência que a solução ótima deixe de estar num dado vértice e salte para outro vértice diferente. Os valores dados nas colunas “Permissível Aumentar” e “Permissível Diminuir” são os valores que se podem somar e subtrair ao valor inicial (coluna “Restrição Lado direito”) sem que a solução ótima mude de vértice. Note-se que se essa restrição contiver o vértice ótimo então, mesmo sem mudar de vértice, a solução ótima, e consequentemente o seu valor ótimo, alteram-se. No entanto são alterações em torno de uma solução com a mesma estrutura pois não há mudanças no conjunto de variáveis que formam a base da solução ótima do problema.

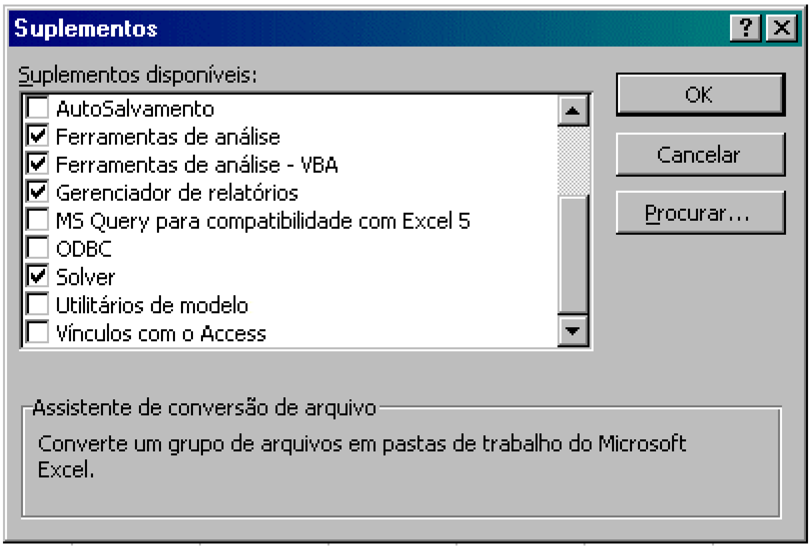
Finalmente a coluna “Preço Sombra”. Já tínhamos visto que se estava a gastar todo o crude B disponível (1900 barris). Então, provavelmente, se tivéssemos mais crude B poderíamos ter um lucro maior (pelo menos enquanto não fossem os outros tipos de crude a restringir a produção). O preço sombra dá exatamente o acréscimo no lucro por cada unidade de recurso (barril de crude B) adicional. Neste caso se tivéssemos 1901 barris de crude B teríamos mais 16,71428571 unidades de lucro, e se tivéssemos 1902 barris de crude B teríamos mais $2 \cdot 16,71428571$

unidades de lucro, etc. Esta relação acréscimo de recurso / acréscimo de lucro mantém-se enquanto o vértice ótimo não se alterar, isto é, dentro dos valores dados pelo aumento e diminuição permissíveis. Note-se que no caso do crude A este valor é zero. De fato, se não gastarmos todo o recurso disponível não era comprando mais que aumentávamos o lucro!

COMO USAR O EXCEL PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. Disponibilizando a Ferramenta de Otimização

Primeiramente deve-se instalar os suplementos.
Abra o Excel vá ao menu Ferramentas e escolha a opção Suplementos.
Aparecerá uma caixa de diálogo com várias opções de suplementos:



Selecione todos os suplementos. Se preferir selecione todos menos os selecionados acima. Com isto você disponibiliza várias funções adicionais, análise de dados e o solver para resolver problemas de programação linear, não linear e etc.

A ferramenta de otimização Solver estará disponível. Click em OK, na caixa de diálogo e veja se no menu Ferramentas aparece o opção Solver.

2. Acompanhando e Resolvendo um Exemplo

O exemplo acompanhado aqui é o mesmo das notas de aula depois serão expostos outros exemplos e suas respostas para testar o aprendizado.

Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina. Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina. Sendo x_1 e x_2 as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são \$4 e \$1 respectivamente, quanto deve a empresa fabricar de cada produto para obter o maior lucro possível (ou o lucro máximo ou ainda maximizar o lucro) ?

Este problema tem a seguinte representação matemática:

$$\max_{x_1,\, x_2} \quad L = 4\,x_1 + x_2$$

sujeito a

$$9x_1 + x_2 \leq 18 \quad \text{e}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Para simplificar sua compreensão a respeito do problema, disponha as células de maneira equivalente à apresentação do problema. Essa disposição não é necessária mas, facilitará bastante na implementação.

Note que existem duas incógnitas L = 4 x_1 + x_2 que só terão valores após a resolução do problema, porém, duas células devem ser escolhidas para representarem estas incógnitas. Veja como ficaria este exemplo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4			x1	x2				
5		Solução	1	9				
6								
7		Max	4	1	13			
8		s.a						
9		HH	9	1	18	<=	18	
10		HM	3	1	12	<=	12	
11								
12	A fórmula usada nas células E7, E9, E10 foram respectivamente:							
13								
14		=SOMARPRODUTO($C$5:$D$5;C7:D7)						
15		=SOMARPRODUTO($C$5:$D$5;C9:D9)						
16		=SOMARPRODUTO($C$5:$D$5;C10:D10)						
17								

As células C5 e D5 não contêm valores no início da colocação do problema. Elas são apenas escolhidas. Observe que todas as fórmulas fazem referência a estas células.

> OBSERVAÇÃO:
>
> A fórmula SOMARPRODUTO
>
> A fórmula somar produto multiplica os componentes correspondentes nas matrizes fornecidas e retorna a soma destes produtos.
> A Sintaxe da função é SOMARPRODUTO(matriz1;matriz2;matriz3; ...)
> Matriz1, matriz2, matriz3,... são matrizes de 2 a 30 cujos componentes se deseja multiplicar e depois somar.
> · Os argumentos da matriz devem ter a mesma dimensão. Se não tiverem, SOMARPRODUTO fornecerá o valor de erro #VALOR!.
> · SOMARPRODUTO trata as entradas da matriz não-numéricas como se fossem zeros.
> A seguinte fórmula multiplica todos os componentes das duas matrizes da planilha anterior e depois soma os produtos — ou seja, 3*2 + 4*7 + 8*6 + 6*7 + 1*5 + 9*3.
> SOMARPRODUTO({3.4.8.6.1.9}; {2.7.6.7.5.3}) é igual a 156

Desta maneira as fórmulas são equivalentes ao lado direito das equações do lucro e restrições do problema.

Após montar o modelo os passos são:

a) Selecionar Solver no menu Ferramentas.
   Aparecerá a seguinte tela:

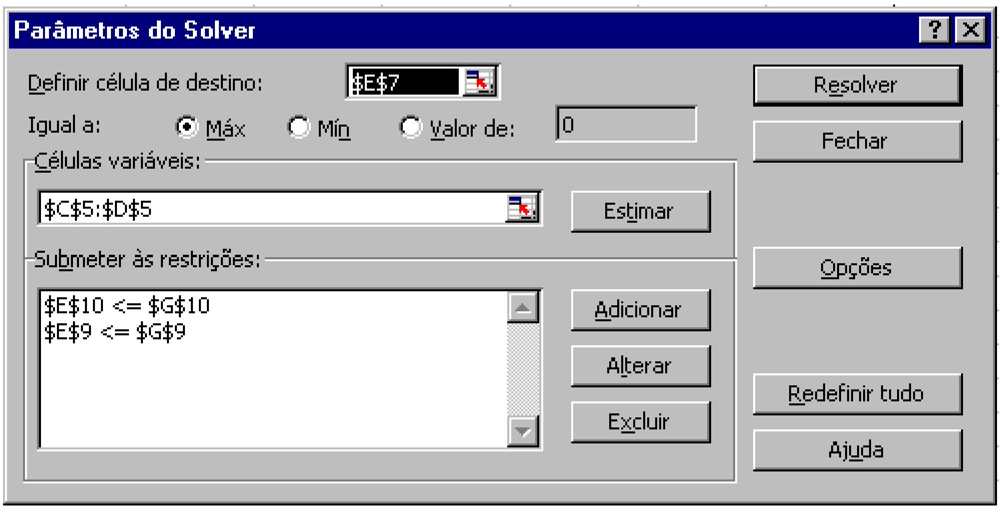


Figura 1

- O endereço E7 que contém a função objetivo deve ser colocado na opção:

  "Definir célula de destino"

- O objetivo, no caso maximizar, deve ser selecionado nos botões de rádio.

- As células correspondentes às variáveis de decisão devem ser colocadas na opção:
  "Células Variáveis"

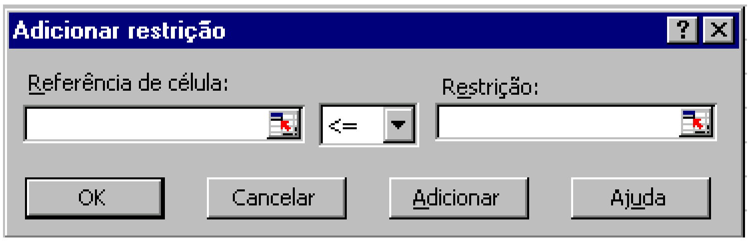
- Escolha então o botão "Opções" e selecione as opções:
  Pressumir modelo linear
  Pressumir não negativos
- Click o botão "OK"

Esta é a caixa de diálogo quando se escolhe Opções na caixa de diálogo anterior:

Pode-se escolher Ajuda para saber mais detalhes.

b) Agora precisa-se entrar com as restrições.

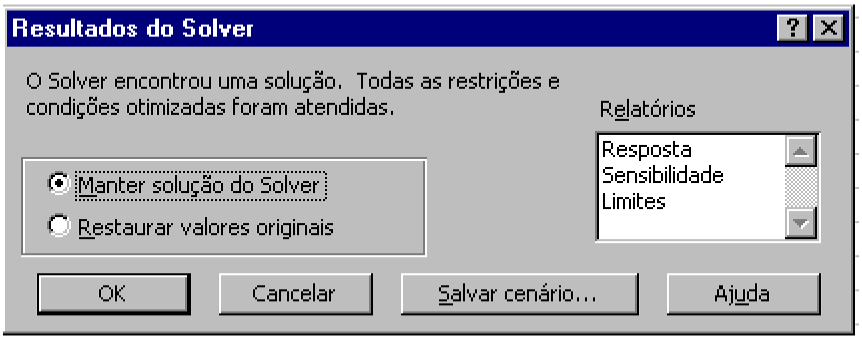
- Selecione o botão "Adicionar", aparecerá outra caixa de diálogo:



- Adicione as restrições do modelo, usando as células corretas como na **Figura 1**

c) Escolha então o botão "Resolver"

- Aparecerá uma nova caixa de diálogo:



- No lado direito você deve selecionar os relatórios que lhe interessam.

d) Agora é só interpretar o resultado.

3. Interpretando os Relatórios

Como se viu existem três relatórios. O de resposta o de sensibilidade e o de limites. Existem problemas sérios na tradução de forma que se você não tiver consciência do método simplex se perde totalmente.

Os resultados são disponibilizados em três planilhas diferentes.

3.1 O relatório resposta

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta
Planilha: [ProglinEEMII.xls]Plan1
Relatório criado: 07/10/97 15:10:01

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$E$7	Max	0	13

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$C$5	Solução x1	0	1
$D$5	Solução x2	0	9

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$E$9	HH	18	$E$9<=$G$9	Agrupar	0
$E$10	HM	12	$E$10<=$G$10	Agrupar	0

Obviamente o relatório traz o resultado. O valor final do lucro na seção Célula de Destino, os valores ótimos a serem produzidos na seção Células Ajustáveis e na seção Restrições se estas foram atingidas ou se está sobrando algo.

3.2 O Relatório de Sensibilidade

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [ProglinEEMII.xls]Plan1
Relatório criado: 07/10/97 15:10:01

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$C$5	Solução x1	1	0	4	5	1
$D$5	Solução x2	9	0	1	0,333333333	0,555555556

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$E$9	HH	18	0,166666667	18	18	6
$E$10	HM	12	0,833333333	12	6	6

Aqui a tradução foi quase mortal. Não é possível utilizar o relatório diretamente dado que ninguém entenderia. É necessário trocar as ordens das linhas. Ou seja, onde tem Permissível Acréscimo você inverte, Sombra Preço é Preço Sombra, Reduzido Custo é Custo Reduzido, etc. Resolvido isto o relatório é uma rearrumação do quadro final do método simplex que traz a solução dos dois problemas, o Primal e o Dual. O quadro final do simplex do exemplo é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
L	0	0	1/6	5/6	13
R_1	1	0	1/6	-1/6	1
R_2	0	1	-1/2	3/2	9

1/6 é o 0,166666667; 5/6 é o 0,8333333333; o acréscimo permitido nas 18 horas homens é dado por 9/(|-1/2|)=18 e para horas máquinas 1/(|-1/6|)=6; os decréscimos são dados respectivamente por 1/(1/6)=6 e 9/(3/2)=6.

A parte correspondente as Células Ajustáveis é equivalente a resolver o problema Primal Como se fosse o Dual, o que forneceria outro quadro final de onde se poderia tirar os valores dos acréscimos. Esta é uma informação adicional ao quadro final do simplex clássico.

3.3 O Relatório de Limites

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites
Planilha:
[ProglinEEMII.xls]Plan1
Relatório criado: 07/10/97 15:10:02

Célula	Nome Destino	Valor
$E$7	Max	13

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$C$5	Solução x1	1	0	9	1	13
$D$5	Solução x2	9	0	4	9	13

Neste exemplo, este relatório pode parecer um pouco idiota, entretanto em casos mais complexos ele se torna útil para visualização dos resultados, que é obviamente o objetivo de um relatório.

4. Exemplos para serem Implementados

4.1 Hillier e Lieberman - Cap.1 pag.26

Uma fabrica produz vidros de alta qualidade, incluindo janelas e portas de vidro. Ela tem 3 fábricas . Na primeira são feitas esquadrias e ferragens de alumínio; na segunda as esquadrias de madeira e a terceira é usada para produzir o vidro e montar os produtos.

Dois produtos potenciais:

P_1 => Porta de Vidro 2,40m, com esquadrias de alumínio.

P_2 => Uma grande janela (1,20x1,80m) de duas folhas e esquadrias de madeira.

- Decidir quantos produtos produzir

Resultado da investigação:

1. Percentagem de capacidade de produção de cada fábrica que estaria disponível para estes produtos .
2. As percentagem requeridas por produtos para cada unidade produzida por minuto.
3. O lucro unitário de cada produto.

Resumo:

Produto / Fábrica	Capacidade usada por produção unitária		Capacidade Disponível
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro por unidade	U$3	U$5	

Sejam x_1 e x_2 o número de unidade dos produtos 1 e 2 por minuto e Z a contribuição resultante para o lucro por minuto.

x_1 e x_2 são VARIÁVEIS DE DECISÃO para o modelo.

O objetivo é encontrar x_1 e x_2 tal que maximizem

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeito a restrição

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$\text{e } x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

Os resultados fornecidos pelo Excel são:

Microsoft Excel 8.0 Relatório de resposta
Planilha: [Exemplo2PL2.xls]Plan1
Relatório criado: 27/09/2000 16:52:40

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$F$8	Lucro/unid Max	0	33

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$D$6	Solução x1	0	1
$E$6	Solução x2	0	6

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$F$11	F1 Max	4	$F$11<=$H$11	Agrupar	0
$F$12	F2 Max	12	$F$12<=$H$12	Agrupar	0
$F$13	F3 Max	15	$F$13<=$H$13	Sem agrupar	3

Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade
Planilha: [Exemplo2PL2.xls]Plan1
Relatório criado: 27/09/2000 16:52:41

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor Final	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$D$6	Solução x1	1	0	3	1E+30	3
$E$6	Solução x2	6	0	5	1E+30	5

Restrições

Célula	Nome	Valor Final	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
$F$11	F1 Max	4	0,75	4	4	4
$F$12	F2 Max	12	2,5	12	3	12
$F$13	F3 Max	15	0	18	1E+30	3

Microsoft Excel 8.0 Relatório de limites
Planilha:
[Exemplo2PL2.xls]Plan1
Relatório criado: 27/09/2000
16:52:42

Célula	Nome Destino	Valor
$F$8	Lucro/unid Max	33

Célula	Nome Ajustável	Valor	Limite Inferior	Resultado Destino	Limite Superior	Resultado Destino
$D$6	Solução x1	1	0	30	1	33
$E$6	Solução x2	6	0	3	6	33

Interprete os resultados!!!!

Aplicação da programação linear no planejamento e controle de produção: definição do *mix* de produção de uma indústria de bebidas

Anselmo Rocha Neto (UNOCHAPECÓ) anselmo@unochapeco.edu.br

Moacir Francisco Deimling (UNOCHAPECÓ)) moacir@unochapeco.edu.br

Marcus Cristian Tosati (UNOCHAPECÓ) tosati@zipway.com.br

Resumo: *Este artigo apresenta a aplicação da programação linear no planejamento e controle de produção de uma indústria de bebidas objetivando definir o seu mix ideal de produção. Para esta aplicação foi utilizada a ferramenta solver que é um suplemento que acompanha o Excel do Oficce 2003 da Microsoft. O estudo caracteriza-se metodologicamente como um estudo de caso, os dados foram coletados através de observações, entrevistas e pesquisa documental. Levantou-se informações sobre: preços de venda e custos dos produtos, demanda mínima e demanda máxima dos produtos, capacidade produtiva das máquinas, seqüênciamento de produção, capacidade dos recursos humanos, programação e tempos disponíveis nos turnos de trabalho e quantidades de matérias primas disponíveis. Os dados foram planilhados para efetuar o cálculo com o solver que apresentou a quantidade de cada produto a ser produzido considerando as restrições do sistema produtivo e objetivando a maximização nos lucros da indústria. Comparando-se a produção atual da empresa com o mix calculado pelo solver, obteve-se um resultado melhor com a utilização da programação linear, concluindo-se que esta ferramenta pode ser utilizada pela empresa na definição de seu mix ideal de produção, obtendo assim maiores lucros (40,68% de aumento com base em um dia de produção).*

Palavras Chaves: *Planejamento e controle da produção; Programação linear; Solver.*

1. Introdução

A acirrada competitividade causada, principalmente, pelo aumento do número de competidores, pela diversidade de opções apresentadas ao consumidor e pelo incremento da oferta de produtos dos concorrentes tem obrigado as empresas a buscarem uma maior produtividade em diversas áreas, inclusive na produção.

A administração da produção tem papel de destaque neste processo, pois gerencia os recursos disponíveis para a produção de bens e serviços em uma organização, para isto ela busca a melhor utilização de máquinas, equipamentos, matérias-primas e recursos humanos visando obter o melhor desempenho possível.

Uma eficiente programação da produção pode conferir à empresa um ganho de produtividade à medida que permita um gerenciamento otimizado de seus recursos. A definição de uma metodologia para programar a produção a fim de obter-se um *mix* produtivo mais rentável pode traduzir-se em vantagem competitiva para as empresas.

Uma das metodologias disponíveis é a Programação Linear que é considerada uma eficiente ferramenta para a programação de produção (Martins e Laugeni, 2005; Lachtermacher, 2004; Moreira, 2004; Goldbarg e Luna, 2005; Caixeta-Filho, 2001).

A organização em estudo é uma indústria de bebidas de pequeno porte situada no Oeste de Santa Catarina que fabrica 15 tipos de diferentes de refrigerantes (entre sabores e volumes) e que não possui qualquer metodologia para planejar e controlar seu *mix* de produção.

Atualmente a indústria utiliza as informações de capacidades (máquinas, equipamentos e recursos humanos), quantidades de matérias-primas disponíveis, demandas de cada produto e, principalmente, através da experiência dos supervisores e gerente de produção define seu *mix* produtivo sem ter uma noção de estar obtendo ganhos maiores ou menores se utilizasse um *mix* alternativo.

Este trabalho objetiva aplicar a Programação Linear para definir o *mix* ideal de produção comparando os dados obtidos com a programação empírica realizada atualmente pela indústria. O estudo teve como base de comparação a produção de um dia e foram utilizadas as medidas de capacidade de recursos humanos, máquinas e equipamentos já existentes na indústria e que são utilizadas na programação atual.

Como ferramenta de otimização da produção utilizou-se o "*solver*" da planilha eletrônica *Excel*, contida no *Oficce* 2.003 da *Microsoft*. Apesar da existência de outras ferramentas de otimização mais potentes que podem ser encontradas no ambiente empresarial, a planilha eletrônica atendeu plenamente as necessidades deste estudo pois o mesmo está baseado em um modelo de poucas variáveis.

Portanto, o presente estudo propõe avaliar a aplicação da ferramenta programação linear no planejamento do *mix* de produção de uma indústria de bebidas, objetivando identificar a aplicabilidade da ferramenta de programação linear, através da ferramenta solver no sistema produtivo de uma empresa.

2. Fundamentação Teórica

As empresas industriais em sua maioria competem em seus mercados com o intuito de, através da venda do mix de produtos que dispõe, obter ganhos financeiros ou lucros.

Kotler (2000, p.420), define mix de produtos como o [...]"conjunto de todos os produtos e itens que um vendedor põe à venda". Ou seja, são todos os produtos que uma empresa produz, sendo que existem empresas que possuem somente um produto, mas a grande maioria produz um sortimento de produtos que são oferecidos a seus clientes, denominado de mix de produtos.

Estes são produzidos em um sistema de produção, que na visão de Martins e Laugeni (2005) tem como objetivo a fabricação de bens manufaturados.

Russomano (2000, p.5), define sistema de produção como um [...]"processo organizado, que utiliza insumos e os transforma em bens ou executa serviços, ambos devem se apresentar dentro dos padrões de qualidade e preço e ter procura efetiva".

O sistema de produção de uma empresa industrial pode ser representado conforme demonstrado na figura 1:

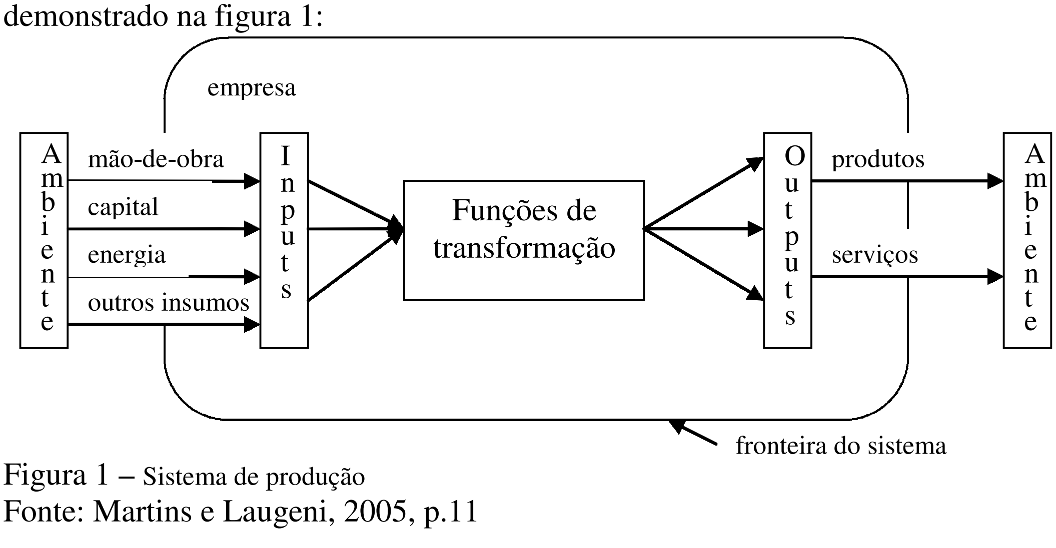


Figura 1 – Sistema de produção
Fonte: Martins e Laugeni, 2005, p.11

Os *inputs* ou entradas são as matérias-primas, mão-de-obra, instalações, máquinas e equipamentos e capital. O processamento (transformação) é a união de todas as entradas, sendo processadas e transformadas em produtos acabados. Os outputs são as saídas de produtos acabados para os estoques da empresa, envolvendo a distribuição e expedição.

Conforme Martins e Laugeni (2005), o planejamento, programação e controle da produção recebe informações sobre estoques existentes, vendas previstas, linha de produtos, modo de produzir e capacidade produtiva, transformando estas informações em ordens de fabricação. Já a função de controle se responsabiliza pela inspeção, manutenção e custos, para assegurar que os objetivos e planos sejam cumpridos.

Para Russomano (2000, p.8), "o objetivo da fábrica é o de transformar matérias-primas em produtos. Porém, esse não é o fim em si mesmo. Sempre deve estar presente o objetivo final: comercializar produtos".

Para Slack, Chambers e Johnson (2002), o planejamento e controle da produção [...]"é a atividade de decidir sobre o melhor emprego dos recursos de produção, assegurando, assim, a execução do que foi previsto".

Planejamento e controle da produção, segundo Russomano (2000, p.47), "(...) é uma função de apoio de coordenação das várias atividades de acordo com os planos de produção, de modo que os programas pré-estabelecidos possam ser atendidos nos prazos e quantidades".

Tubino (2000, p.23) diz que o planejamento e controle da produção "(...) é o responsável pela coordenação e aplicação dos recursos produtivos de forma a atender da melhor maneira possível aos planos estabelecidos em níveis estratégico, tático e operacional".

A definição apresentada por Tubino (2000), não se preocupa somente com as quantidades, e com o processo produtivo, e sim com o planejamento que a empresa efetuou, que deve ser cumprido de todas as formas, sem prejudicar a saúde da mesma e sem deixar de honrar seus compromissos com os clientes e fornecedores.

Cabe ao PCP harmonizar os diálogos com todos os setores da empresa, pois este recebe informações do departamento de vendas para ver as quantidades que serão comercializadas, deverá ter um bom relacionamento com compras para poder suprir os estoques na hora em que for preciso; com o departamento financeiro, para verificar se a empresa possui recursos financeiros; um ótimo relacionamento com a produção para poder executar os planos do departamento de vendas; com a engenharia de produção para o desenvolvimento de novos produtos e correções em certos projetos desenvolvidos; e na engenharia do processo para verificar os tempos de fabricação, os tempos de espera e atraso.

Na procura de um plano de produção de menor custo, Martins e Laugeni (2005) afirmam que um dos métodos mais utilizados é a programação linear, em que a função objetivo a ser minimizada é o custo global do plano. Também pode ser utilizada buscando o lucro máximo no mix de produção analisado.

Segundo Lachtermacher (2002, p.27) a programação linear é utilizada em diversas áreas como: "Administração da produção; Análise de investimentos; Alocação de recursos limitados; Planejamento regional; Logística; Custo de transporte; Localização da rede de distribuição e Alocação de recursos de marketing em diversos meios de comunicação".

Moreira (2004, p.39) argumenta que "A Programação Linear é um modelo matemático desenvolvido para resolver determinados tipos de problemas onde as relações entre as variáveis relevantes possam ser expressas por equações e inequações lineares".

Os problemas de programação linear possuem uma expressão matemática (variáveis de decisão) que devem ser maximizadas ou minimizadas e um conjunto de restrições representadas por equações e inequações, que devem ser atendidas.

Segundo Goldbarg e Luna (2005), são três os principais passos a serem seguido quando da resolução de um problema de programação linear envolvendo otimização de padrões de produção: definição das variáveis de decisão, definição da função objetivo e definição das restrições do sistema em questão.

As variáveis de decisão são as alternativas possíveis para a solução do problema de programação linear.

A função objetivo, segundo Caixeta-Filho (2001, p.11), é o passo onde "deve ser definido o objetivo básico do problema ... com respeito à otimização a ser perseguida". E acrescenta, "Tal objetivo será assim representado por uma função objetivo, a ser maximizado ou minimizada".

As restrições são, de acordo com Caixeta-Filho (2001), uma série de limitações do sistema.

Uma vantagem do modelo de programação linear na visão de Goldbarg e Luna (2005, p.25), [...] "está na extraordinária eficiência dos algoritmos de solução hoje existentes, disponibilizando alta capacidade de cálculo e podendo ser facilmente implementado até mesmo através de planilhas e com o auxílio de microcomputadores pessoais".

Para resolver um problema de Programação Linear, pode-se utilizar um *software*, dentre os existentes tem-se o *Solver* do *Excel*, que acompanha o pacote de aplicativos oferecido pela empresa Microsoft, que é de fácil acesso.

Conforme Dodge e Stinson (2001, p.559), [...]"O Solver pode manipular problemas que envolvam muitas células variáveis e pode ajudar a encontrar combinações de variáveis que maximizam ou minimizem uma célula de destino. Ele também permite especificar uma ou mais restrições – condições que devem ser atendidas para que a solução seja válida [...]".

O *solver* é um suplemento que acompanha o *microsoft excel*, que tem por finalidade ser utilizado como ferramenta para efetuar os cálculos de programação linear. Este suplemento irá demonstrar nos cálculos qual o mix de produtos mais rentável para a empresa produzir, com o intuito de aumentar a rentabilidade da empresa, respeitando as restrições do sistema.

O *solver* pode manipular problemas que possuem mais de uma variável, que maximize ou minimize a função objetivo, levando em consideração as restrições ou condições que serão impostas para solucionar o problema.

Conforme Luche e Morabito (2005), os resultados obtidos da aplicação da programação linear na otimização na programação da produção mostram que os modelos são capazes de gerar soluções melhores do que aquelas que vinham sendo utilizadas pela empresa.

3. Metodologia

A empresa, situada no oeste de Santa Catarina é uma indústria que atua no ramo alimentício e que produz refrigerantes de vários sabores. A empresa possui um sistema produtivo com um *lay-out* em linha (por produto) e a programação da produção é elaborada com os dados de demanda, capacidades produtivas e disponibilidades de insumos, sem o auxílio de qualquer tipo de programa ou *software.*

A aplicação do estudo ocorreu no setor produtivo desta empresa, caracterizando-se como um estudo de caso, como técnica de coleta de dados foram utilizadas a observação, a pesquisa documental e a entrevista.

A observação, realizada pelo pesquisador, foi feita no processo produtivo da empresa onde foram levantados os tempos de cada processo individual, resultando num tempo total de fabricação.

A pesquisa documental foi realizada nos seguintes setores: no departamento de produção para obter os tempos de utilização e as capacidades de cada máquina do processo produtivo; no departamento de marketing/vendas foram obtidos os dados relativos as quantidades de demanda de cada produto; no departamento financeiro foram analisados os preços de venda e os custos de produção de cada produto; e, no departamento de recursos humanos obteve-se os dados relativos aos turnos de produção de cada setor envolvido no processo produtivo, bem como a quantidade de pessoas em cada setor por turno.

A entrevista foi realizada com os encarregados de produção de cada setor, bem como com o gerente de produção para confirmar os dados obtidos com a pesquisa documental e a observação.

Os dados foram tabulados em planilha *Excel* e calculados com o auxílio da ferramenta *Solver*, e após a resolução os dados foram colocados em quadros para melhor visualização e análise.

4. O processo produtivo da indústria de bebidas

O processo produtivo inicia-se na xaroparia onde é feito o xarope simples e o xarope composto que darão origem aos vários tipos de refrigerante.

Na máquina A (caracol) é colocado o açúcar que é enviado para a máquina B, a qual faz a inversão do açúcar. A inversão do açúcar é a transformação do açúcar bruto através da mistura de água, sendo aquecido até ser transformado em xarope simples. Após concluída a inversão, este é enviado pela tubulação para a máquina C (filtro) que filtra o xarope, o xarope simples passa por um filtro no qual todas as impurezas que restaram da inversão ficam retidas. Após a filtragem, o xarope simples é enviado pela tubulação para o depósito A onde fica estocado. Este processo pode ser visualizado através da figura 1.

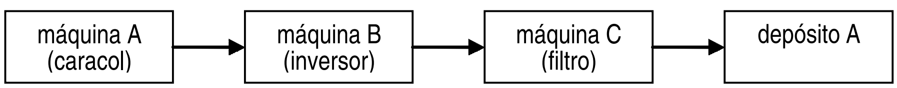


FIGURA 1 – Processo de fabricação do xarope simples

A partir do estoque de xarope simples (depósito A), este será transformado em xarope composto e será estocado no depósito B. O xarope simples é enviado para a máquina D (misturador) por uma tubulação, onde o processo de transformação do xarope é realizado através da mistura do xarope simples com outras matérias-primas que irão conferir o sabor característico a cada tipo de refrigerante (cola, laranja, guaraná, etc.). A Figura 2 apresenta o fluxo de produção da xaroparia.

FIGURA 2 – Processo de fabricação do xarope composto

O setor de sopro inicia o processo em paralelo ao setor de xaroparia. Na sopradora de garrafas as pré-formas são colocadas na máquina X (esteira), que as transporta e envia três unidades por vez para a máquina Y (sopradora) que sopra as pré-formas. O sopro é executado em três pré-formas por vez. As pré-formas entram na máquina Y onde estão situados os moldes aquecidos ocorrendo o sopro que as transforma em garrafas do tipo 2 e tipo 4.

Depois de sopradas as garrafas vão para a máquina Z (rotuladora) que coloca o rótulo na garrafa e envia a mesma para o depósito C na qual ficam aguardando para serem enviadas para a máquina E (lavadora) do engarrafamento. Todo este processo é automatizado, precisando apenas de dois funcionários para cuidar das máquinas e efetuar o controle de qualidade, para verificar se não há alguma garrafa com defeito ou sem rótulo.

As garrafas sopradas, rotuladas e lavadas são armazenadas no depósito de garrafas sopradas, e ficam aguardando até o xarope composto estar pronto. A Figura 3 apresenta o fluxo de produção do sopro.

FIGURA 3 – Fluxo de produção do sopro

O xarope composto que está no depósito B da xaroparia é enviado pela tubulação para a máquina D (misturador) que faz a mistura do xarope composto com água e CO_2 (gás carbônico), transformando-o em refrigerante. O refrigerante é enviado pela tubulação para a máquina F (enchedora), que fica esperando as garrafas virem da máquina E (lavadora). A máquina E (lavadora), lava as garrafas e envia pela esteira para a máquina F (enchedora), que envaza as garrafas da seguinte maneira: as garrafas entram na máquina são encaixadas no bico enchedor que enche com a quantidade pré-determinada.

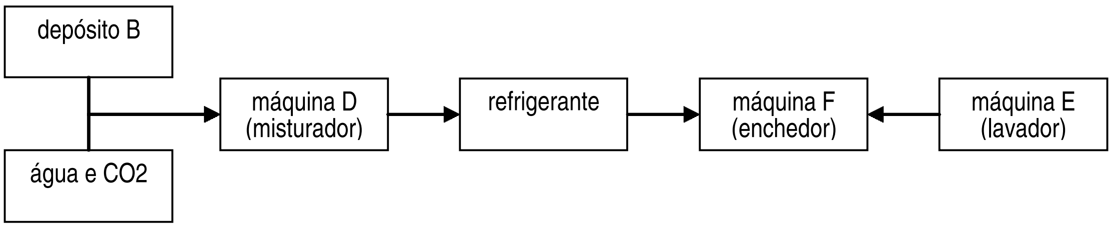


FIGURA 4 – Fluxo de envazamento das garrafas de refrigerante

Depois de enchidas, as garrafas são envias pela esteira para a máquina G (arrolhadora) que arrolha as mesmas, inserindo as tampas e envia pela esteira para a máquina H (datadora) que insere a data de validade do produto. Marcada a data de validade, o produto vai para a máquina I (empacotadeira) que divide em dois tipos de pacotes: seis unidades de produto acabado para as garrafas tipo 4, e 12 unidades de produto para as garrafas tipo 2, e as envolve com filme termo-encolhivel. Depois de envoltas no filme termo-encolhível passam pela máquina J (túnel de encolhimento) que faz com que o filme se encolha, formando o pacote de produto acabado que são colocados nos paletes.

Os pallets são enviados com o auxilio da empilhadeira para a máquina L (paletizador) onde é envolto pelo filme strech para dar sustentabilidade ao pallet, que é enviado para o depósito D onde fica estocado. A Figura 4 apresenta o fluxo de produção do engarrafamento:

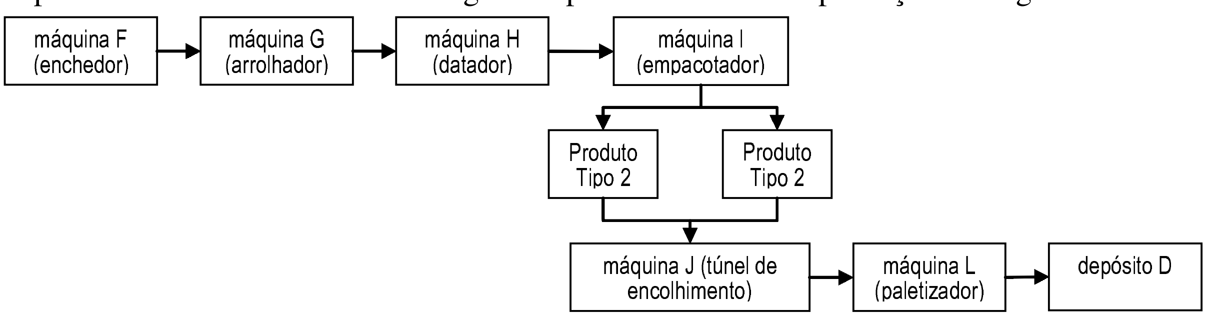


FIGURA 5 – Fluxo de produção final

Em resumo, concluída a preparação do xarope composto este é enviado para o premix onde é feita a mistura do xarope composto, com água e gás, para transformá-lo em refrigerante. O refrigerante é enviado para a enchedora que completa as garrafas que vem da lavadora de garrafas. Após enchidas, as garrafas são enviadas para a arrolhadora, datadora, empacotadora, tunel de encolhimento, paletizadas e enviadas para o estoque.

O refrigerante que é produzido em três tipos de produtos, cada um com várias opções de sabores. Os produtos são o 4Q, 4G e 2Q. Os sabores do produto 4Q são o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, os sabores do produto 4G são 12, 13, 14 e 15, e os sabores do produto 2Q são 8, 9, 10 e 11.

5. Estudo de caso: aplicação da programação linear na indústria de bebidas

Para o cálculo do solver foram definidas as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições do sistema produtivo da indústria de bebidas estudada, assim determinados:

- Variáveis de decisão: os produtos e seus respectivos sabores (total de 15 variáveis de decisão), apresentados na figura 6 como <u>células variáveis</u>:

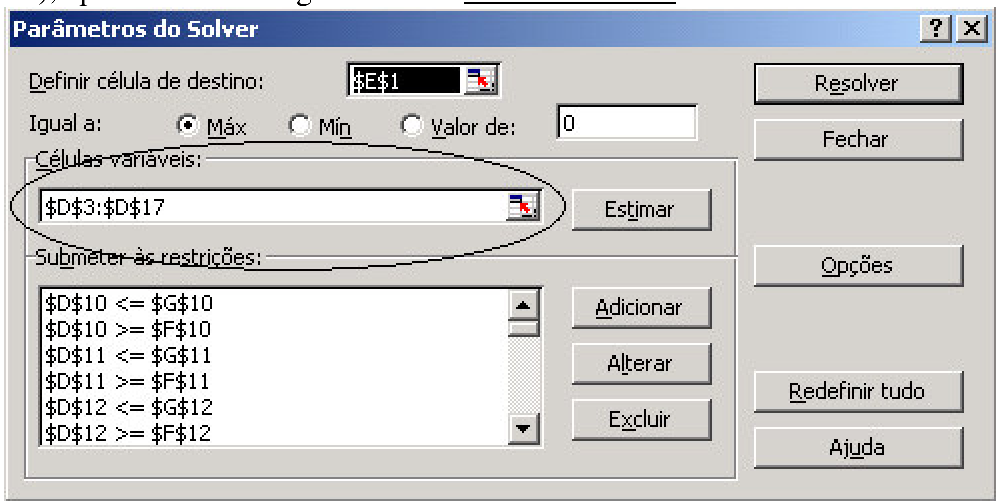


FIGURA 6 - As variáveis de decisão

As 15 variáveis de decisão são: 4Q 1, 4Q 2, 4Q 3, 4Q 4, 4Q 5, 4Q 6, 4Q 7, 4G 12, 4G 13, 4G 14, 4G 15, 2Q 8, 2Q 9, 2Q 10 e 2Q 11.

- Função objetivo: objetivando a maximização do lucro dos produtos e seus respectivos sabores (somatória do lucro de cada variável de decisão multiplicado pela quantidade produzida), apresentadas nas figuras 7 como <u>células de destino, igual a</u>:

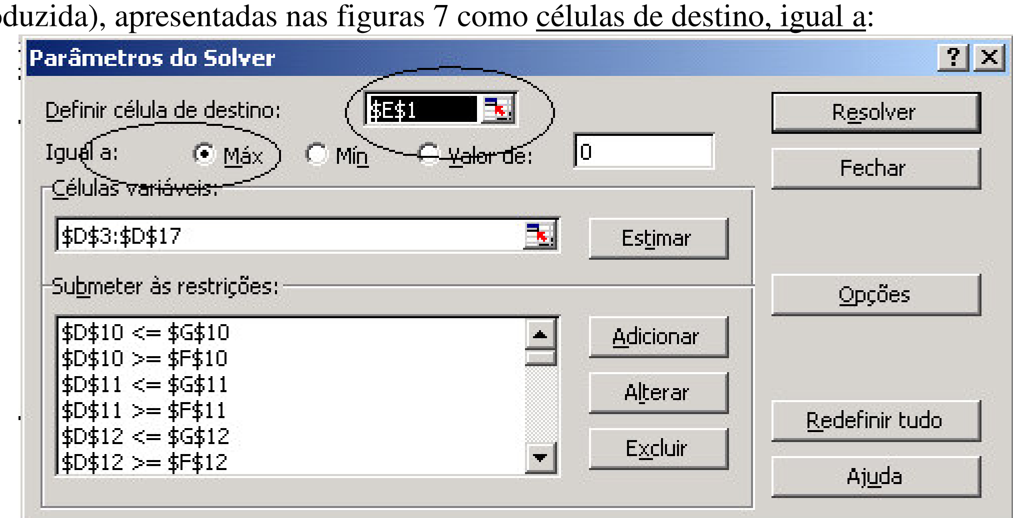


FIGURA 7 - A função objetivo

A fórmula da função objetivo é: MAX Z = (0,98 x 4Q1) + (0,89 x 4Q2) + (1,00 x 4Q3) + (1,00 x 4Q4) + (0,90 x 4Q5) + (0,71 x 4Q6) + (0,70 x 4Q7) + (1,00 x 4G12) + (0,88 x 4G13) + (0,97 x 4G14) + (0,80 x 4G15) + (0,78 x 2Q8) + (0,77 x 2Q9) + (0,75 x 2Q10) + (0,70 x 2Q11).

- Restrições deste sistema: demanda mínima e demanda máxima de cada produto com seus respectivos sabores (15 variáveis de decisão); capacidade produtiva das máquinas (dos setores de xaroparia, sopro e engarrafamento); recursos de mão-de-obra e turnos de trabalho (dos setores de xaroparia, sopro e engarrafamento) e recursos materiais, apresentados na figura 8 como <u>submeter às restrições</u>:

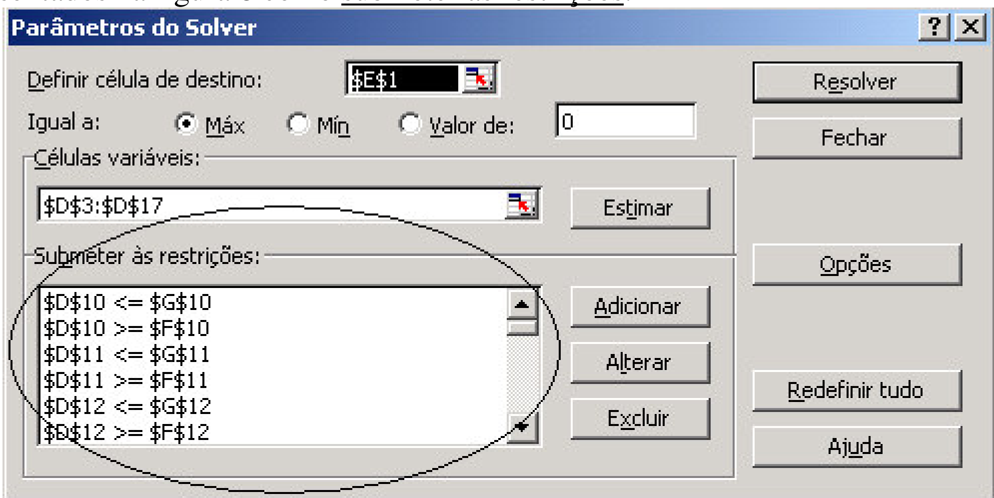


FIGURA 8 - As restrições do sistema

Devido as fórmulas conterem informações que a empresa não quer divulgar elas não serão explicitadas, a seguir descreve-se as restrições deste sistema:

– Demanda: para cada variável de decisão foi estipulada uma demanda máxima e uma demanda mínima (ambas estipuladas pelo mercado).
– Capacidade de máquinas: para cada máquina dos setores de xaroparia, sopro e engarrafamento foi estipulado o tempo máximo para a sua utilização (levando-se em conta as horas-homem disponíveis).
– Capacidade de matéria-prima: quantidades de todas as matérias-primas necessárias e disponíveis para produzir os 15 produtos (variáveis de decisão).
– Capacidade de embalagens: quantidades de todas as embalagens necessárias e disponíveis para produzir os 15 produtos (variáveis de decisão).
– Não-negatividade: para cada variável de decisão foi estipulado que seu valor seja maior ou igual a zero.

O solver calcula o problema, tendo como base um dia de produção, utilizando todas as restrições impostas e trazendo os resultados da maximização do resultado conforme as restrições impostas. A maximização do resultado gerou um lucro diário de R$ 8.625,18 (oito mil, seiscentos e vinte e cinco reais e dezoito centavos), sendo restringido pela demanda máxima de venda por dia.

6. Considerações finais

Comparando os dados constantes no quadro 1 (cálculo efetuado pelo solver – dados do solver), com os dados originais do sistema de produção da empresa (cálculo sem utilizar o solver – dados da empresa), constata-se que o solver fez o cálculo utilizando as mesmas restrições de produção que foram utilizadas pelo sistema de produção da empresa. O solver fez uma análise, utilizando o parâmetro Lucro, que é o que a empresa deveria levar em consideração. No quadro 1, estão os dados de ambas as situações, uma com o cálculo do solver e a outra da programação de produção original da empresa (sem utilizar a programação linear).

O quadro 1 apresenta: na coluna Produto os produtos que a empresa fabrica; na coluna Sabor os sabores de cada produto produzido; na coluna Variavél a quantidade que deve ser produzida para maximizar os resultados da empresa; na coluna Resultado o lucro multiplicado pela variável (quantidade produzida) gerando o resultado máximo alcançado pela empresa; e na coluna Diferença a diferença de ganho utilizando o solver *versus* utilizando a programação normal de produção da empresa.

		Dados do Solver		Dados da Empresa		
Produto	**Sabor**	**Variável**	**Resultado**	**Produção**	**Resultado**	**Diferença**
4Q	1	578	566,44	222	217,56	348,88
	2	824	733,36	836	744,04	(10,68)
	3	968	968,00	545	545,00	423,00
	4	299	299,00	129	129,00	170,00
	5	470	423,00	150	135,00	288,00
	6	1889	1.341,19	1.430	1015,30	325,89
	7	290	203,00	335	234,50	(31,50)
2Q	8	69	53,82	127	99,06	(45,24)
	9	95	73,15	456	351,12	(277,97)
	10	116	87,00	332	249,00	(162,00)
	11	210	147,00	321	224,70	(77,70)
4G	12	607	607,00	211	211,00	396,00
	13	1165	1.025,20	889	782,32	242,88
	14	1066	1.034,02	447	433,59	600,43
	15	1330	1.064,00	950	760,00	304,00
			8.625,18		6.131,19	2.493,99

QUADRO 1 - Comparação entre produção real e cálculo do *solver*

Apesar de em alguns produtos a empresa obteve um ganho em relação ao que seria produzido pelo *solver*, na maioria dos produtos o ganho foi menor, no total geral apresentou um lucro de R$ 6.131,19 (seis mil cento e trinta e um reais e dezenove centavos).

A programação realizada com o *solver* explorou melhor a lucratividade dos produtos mais rentáveis e obteve um retorno de R$ 8.625,18 (oito mil seiscentos e vinte e cinco reais e dezoito centavos), gerando uma diferença a favor do cálculo do solver de R$ 2.493,99 (dois mil quatrocentos e noventa e três reais e noventa e nove centavos).

Observa-se que esta produção é de apenas um dia, transformando estes valores em base anual, tem-se em média 252 dias úteis trabalhados em um ano, perfazendo uma diferença anual de R$ 628.485,48 (seiscentos e vinte e oito mil, quatrocentos e oitenta e cinco reais e quarenta e oito centavos).

Portanto, a falta de uma análise mais criteriosa, o não aproveitamento dos recursos disponíveis como as informações de mercado e das ferramentas de programação linear, fazem com que a empresa não utilize o seu processo produtivo de forma mais eficiente, deixando de obter lucros maiores, produzindo produtos que trazem pouco retorno para a empresa.

A empresa em questão não teve nenhum custo de implantação da programação linear com a utilização do *solver*, pois o programa acompanha o *Microsoft Excel*, o qual foi adquirido pela empresa e pago quando da compra dos computadores, sendo preciso somente instalá-lo.

Verificada a aplicabilidade da programação linear, os baixos custos de implantação e os resultados alcançados, conclui-se que a programação linear com o auxílio do *solver* pode ser utilizada pela empresa para uma melhor utilização do seu sistema produtivo.

Portanto, a utilização da programação linear trouxe contribuições para o estudo demonstrando:

- O cálculo da quantidade a ser produzida para atender as necessidades dos clientes considerando as restrições do sistema produtivo;
- O *mix* de produção mais rentável para a venda;

– A definição das quantidades de cada produto que devem ser produzidas, contribuindo para a organização da programação da produção, fazendo com que os produtos com maior rentabilidade tenham prioridade na produção.

A diferença obtida, mesmo tendo a empresa um sistema produtivo enxuto e sem desperdícios, foi expressiva tendo como valores R$ 2.493,99 representando 40,68% em um dia de trabalho, concluindo-se pela aplicabilidade da programação linear na empresa.

É importante salientar que o estudo limitou-se a apenas uma amostra, correspondente a um dia de produção. Sugere-se uma ampliação do período de aplicação desta metodologia afim de verificar se os resultados se confirmarão.

7. Referências Bibliográficas

CAIXETA-FILHO, José Vicente. **Pesquisa Operacional**: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais. São Paulo: Atlas, 2001. 171 p.

DODGE, Mark e STINSON, Craig. **Microsoft Excel 2000 – Guia Autorizado**. São Paulo: Makron Books, 2001. 1016 p.

GOLDBARG, Marco Cesar e LUNA, Henrique Paccal. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. 2.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005. 649 p.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2004. 384 p.

LUCHE, José Roberto Dale e MORABITO, Reinaldo. Otimização na programação da produção de grãos eletrofundidos: um estudo de caso. **Gestão & Produção**. São Carlos, v. 12, n. 1, p.135-149. jan./abr.2005.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Administração da Produção e Operações**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. 619 p.

KOTLER, Philip. **Administração de Marketing**: a edição do novo milênio. 10. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2000. 764 p.

RUSSOMANO, Victor Henrique. **Planejamento & Controle da Produção**. 6. ed. São Paulo: Pioneira, 2000. 320 p.

TUBINO, Dalvio Ferrari. **Manual de planejamento e controle da produção**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2000. 220 p.