



# INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

**Prof. Dr. Rogério de Melo Costa Pinto**

Curso de Pós-Graduação  
Especialização em Estatística Empresarial

---

---

---

---

---

---

---

---



## Introdução à Inferência Estatística

---

---

---

---

---

---

---

---



Na inferência estatística vamos apresentar os argumentos estatísticos para fazer afirmações sobre as características de uma população, com base em informações dadas por amostras.

Ex:

-Cozinheira verificando se o prato que ela está preparando tem ou não a quantidade de sal adequada;

- Um cliente, após experimentar uma uva num supermercado, decide se vai comprar ou não as uvas.

---

---

---

---

---

---

---

---



Os modelos probabilísticos procuram medir a variabilidade de fenômenos casuais de acordo com suas ocorrências.

Na prática o pesquisador tem alguma idéia sobre a forma da distribuição, mas não dos valores exatos dos parâmetros que as especificam.

Ex: Parece razoável supor que a distribuição das alturas dos brasileiros adultos possa ser representada por um modelo normal. Mas essa afirmação não é suficiente para determinar qual a distribuição normal correspondente.

---

---

---

---

---

---

---

---



Se pudéssemos medir as alturas de todos os brasileiros adultos, teríamos meios de obter sua distribuição exata e, daí, produzir os correspondentes parâmetros.

Nessa situação não teríamos necessidade de usar a inferência estatística.

Isso raramente é conseguido. Porque é DISPENDIOSO ou DEMORADO ou o processo é DESTRUTIVO.

---

---

---

---

---

---

---

---



Outras vezes estamos interessados em explorar relações entre variáveis envolvendo experimentos mais complexos, para a obtenção dos dados.

Ex: A altura que um produto é colocado na gôndola de um supermercado afeta a sua venda?

---

---

---

---

---

---

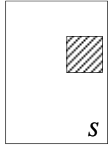
---

---



# Estatística

Estatística Descritiva X Estatística Inferencial




---

---

---

---

---

---

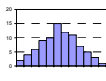
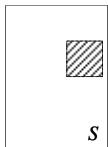
---

---

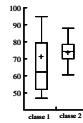


# Estatística

Estatística Descritiva X Estatística Inferencial



Classes	f.A	f.R
10-20	4	0,04
20-30	8	0,08
30-40	8	0,08
40-50	12	0,12
50-60	20	0,20
60-70	23	0,23
70-80	12	0,12
80-90	19	0,19
90-100	7	0,07
100-120	3	0,03
120-150	1	0,01
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>1,00</b>



- média
- moda
- mediana
- desvio médio
- desvio padrão
- assimetria
- curtose
- coeficiente de variação

---

---

---

---

---

---

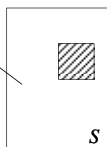
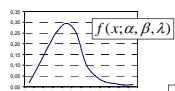
---

---



# Estatística

Estatística Descritiva X Estatística Inferencial




---

---

---

---

---

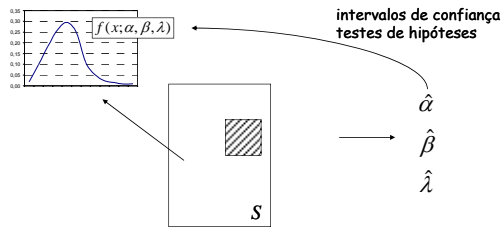
---

---

---

## Estatística

### Estatística Descritiva X Estatística Inferencial




---

---

---

---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

**POPULAÇÃO:** é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação.

**AMOSTRA:** é qualquer subconjunto da população.

Ex: Pesquisa para estudar os salários dos 500 funcionários da Companhia MB. Seleciona-se uma amostra de 36 indivíduos e anotam-se os seus salários.

---

---

---

---

---

---

---

---



Ex<sub>2</sub>. Queremos estudar a proporção de indivíduos na cidade A que são favoráveis a certo projeto governamental. Uma amostra de 200 pessoas é sorteada, e a opinião de cada uma é registrada como sendo a favor ou contra o projeto.

Ex<sub>3</sub>. O interesse é investigar a duração de vida de um novo tipo de lâmpada, pois acreditamos que ela tenha uma duração maior do que as fabricadas atualmente. 100 lâmpadas do novo tipo são deixadas acesas até queimarem. A duração em horas de cada lâmpada é registrada.

---

---

---

---

---

---

---

---



Ex<sub>4</sub>. Digamos que X represente o peso real de pacotes de café, enchidos automaticamente por uma máquina. Sabe-se que a distribuição de X pode ser representada por uma normal, com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  desconhecidos.

Sorteamos 100 pacotes e medimos seus pesos.

---

---

---

---

---

---

---

---



### Problemas de Inferência

1. Para investigar a “honestidade” de uma moeda, nós a lançamos 50 vezes e contamos o número de caras observadas. Indicando por X o número de caras obtidas, sabemos que, X segue uma distribuição binomial, ou seja,  $X \sim b(50, p)$ . Lançada a moeda, vamos supor que tenham ocorrido 36 caras. Esse resultado traz evidência de que a moeda seja “honest”?

Suponha que a decisão foi rejeitar a “honestidade” da moeda: qual é a melhor estimativa para  $p$ , baseando-se no resultado observado?

---

---

---

---

---

---

---

---



2. No caso da máquina de encher café automaticamente, digamos que ela esteja regulada para enchê-los segundo uma distribuição normal com média 500 gramas e desvio padrão de 100 gramas. Sabemos também que, às vezes, a máquina desregula-se e, quando isso acontece, o único parâmetro que se altera é a média, permanecendo a mesma variância. Para manter a produção sob controle, iremos colher uma amostra de 100 pacotes e pesá-los.

Como esta amostra nos ajudará a tomar uma decisão?

---

---

---

---

---

---

---

---



Para conhecermos as propriedades da distribuição de determinadas variáveis devemos repetir um mesmo experimento várias vezes sob as mesmas condições. Entretanto, nem sempre é possível, mas em determinadas condições é possível determinar teoricamente o comportamento de algumas medidas feitas na amostra, com por exemplo a média.

---

---

---

---

---

---

---

---



Para determinar teoricamente o comportamento de algumas medidas devemos antes responder a 4 perguntas:

- a) Qual a população a ser amostrada?
- b) Como obter os dados (a amostra)?
- c) Que informações pertinentes (estatísticas) serão retiradas da amostra?
- d) Como se comporta(m) a(s) estatística(s) quando o mesmo procedimento de escolher a amostra é usado numa população conhecida?

---

---

---

---

---

---

---

---



## Como Selecionar uma Amostra

- ✓ Levantamentos amostrais
- ✓ Planejamento de Experimentos
- ✓ Levantamentos Observacionais

---

---

---

---

---

---

---

---



## Amostragem Aleatória Simples

- Numa urna tem-se 5 tiras de papel, numeradas 1, 3, 5, 5, 7. Uma tira é sorteada e recolocada na urna, então, uma segunda tira é sorteada. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  o primeiro e o segundo números sorteados.

---

---

---

---

---

---

---

---



- Amostra aleatória Simples  
Pop{1, 3, 5, 5, 7}  $n = 2$

$X_1$	$X_2$				$P(X_1=x)$
	1	3	5	7	
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
$P(X_2=x)$	1/5	1/5	2/5	1/5	1

---

---

---

---

---

---

---

---

- Parâmetro: medida utilizada para descrever uma característica populacional. Ex:  $\mu, \sigma$
- Estimador: é uma variável aleatória que é função dos dados amostrais. Ex:  $\bar{x} = 170 \text{ cm}$  é um estimador de  $\mu$
- Estimativa: é o valor numérico assumido pelo estimador, quando são substituídos os dados amostrais. Ex:
- Inferência estatística: objetivo de inferir propriedades de um agregado maior (a população) a partir de um conjunto menor (a amostra).

---

---

---

---

---

---

---

---

## POPULAÇÃO x AMOSTRA

TIPO DE UTILIZAÇÃO	População	Amostra
VARIÂNCIA	$\sigma^2$	$S^2$
DESVIO-PADRÃO	$\sigma$	$S$
MÉDIA	$\mu$	$\bar{X}$
PROPORÇÃO	$p$	$\hat{p}$

---

---

---

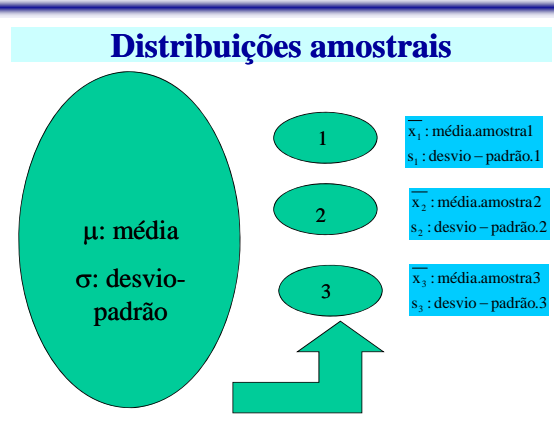
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

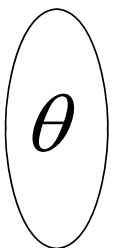
---

---

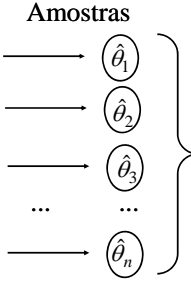
Universidade Federal de Uberlândia  
 Faculdade de Matemática  
 Curso de Especialização em Estatística Empresarial

## Distribuições amostrais

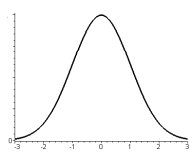
População



Amostras



Distribuição Amostral



---

---

---

---

---

---

---

---

Universidade Federal de Uberlândia  
 Faculdade de Matemática  
 Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- Resumindo o processo:
- a) População com um parâmetro  $\theta$ .
- b) Retira-se  $k$  amostras por um processo aleatório qualquer
- c) Calcula-se o valor  $\hat{\theta}_i$  para cada amostra ( $i = 1, 2, \dots, k$ )
- d) Com os valores de  $\hat{\theta}_i$  das  $k$  amostras constrói-se a distribuição amostral de  $\theta$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

Universidade Federal de Uberlândia  
 Faculdade de Matemática  
 Curso de Especialização em Estatística Empresarial

## Exemplo das Tiras na Urna

- Amostra aleatória Simples  
 $\text{Pop}\{1, 3, 5, 5, 7\}$   $n = 2$

$X_1$	$X_2$				$P(X_1=X_2)$
	1	3	5	7	
1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
$P(X_2=x)$	1/5	1/5	2/5	1/5	1

---

---

---

---

---

---

---

---

Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática  
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Distribuição amostral da média								
$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7	Total
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/25	2/25	5/25	6/25	6/25	4/25	1/25	1,00

Distribuição amostral da amplitude total					
w	0	2	4	6	Total
$P(W = w)$	7/25	10/25	6/25	2/25	1,00

Distribuição amostral da variância					
$s^2$	0	2	8	18	Total
$P(S^2 = s^2)$	7/25	10/25	6/25	2/25	1,00

---

---

---

---

---

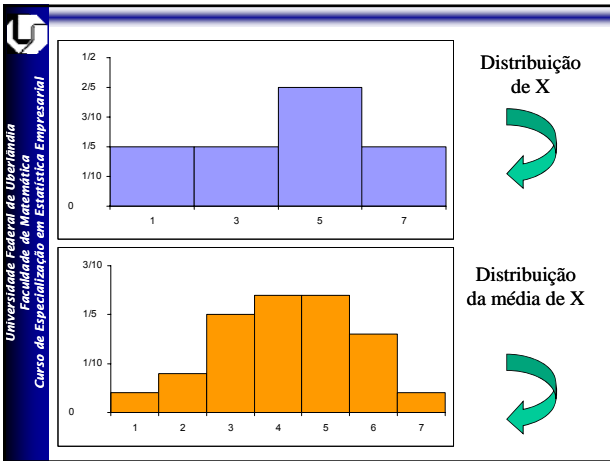
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

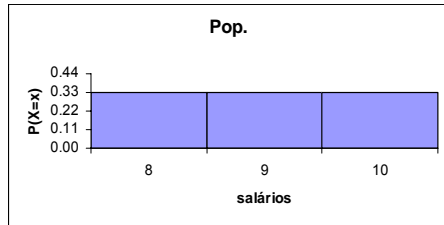
---

---



$$\mu = 9 \text{ salários}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3} \text{ salário}^2$$




---

---

---

---

---

---

---

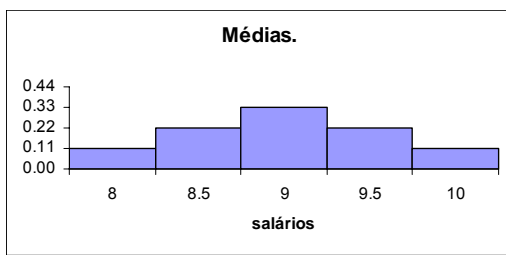
---



### Amostragem com reposição

$$n=2$$

$$\mu_{\bar{X}} = 9 \text{ salários} = \mu \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{3} \text{ salário}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$




---

---

---

---

---

---

---

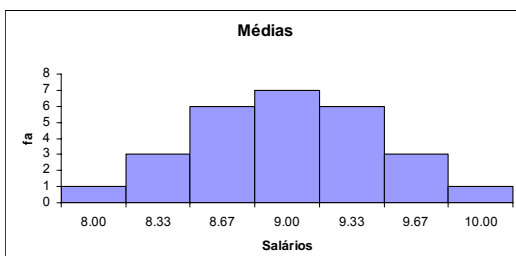
---



### Amostragem com reposição

$$n=3$$

$$\mu_{\bar{X}} = 9 \text{ salários} = \mu \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{2}{9} \text{ salário}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$




---

---

---

---

---

---

---

---



## A distribuição de $\bar{X}$

### Variáveis normais

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

---

---

---

---

---

---

---

---



▪ Variáveis não normais TCL  
Se  $X$  é uma variável qualquer com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

---

---

---

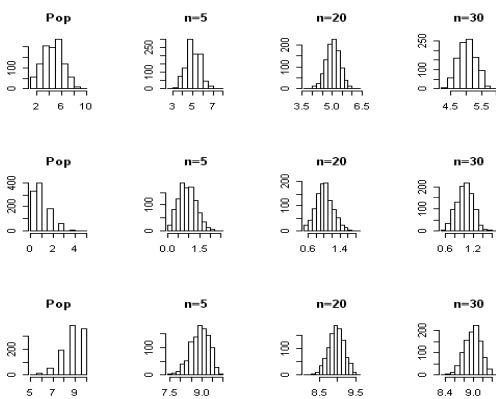
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---



## Teorema do Limite Central

- A distribuição das médias amostrais, obtidas de amostras de tamanho  $n$ , selecionadas ao acaso de uma população de tamanho  $N$ , com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  será aproximadamente normal com média  $\mu_{\bar{x}} = \mu$  e
- variância  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$  se a amostragem for realizada com reposição, ou  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$  se a amostragem for realizada sem reposição em uma população finita ( $\frac{n}{N} > 0,05$ ), independentemente da distribuição da variável em questão.

---

---

---

---

---

---

---

---



## Exemplo

Seja  $X: N(80, 26)$ . Dessa população retiramos uma amostra de  $n=25$ . Calcular

- $P(\bar{X} > 83)$
- $P(\bar{X} \leq 82)$
- $P(\bar{X} - 2\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2\sigma_{\bar{x}})$

---

---

---

---

---

---

---

---



## Exemplo

Seja  $X: N(100, 85)$ . Retiramos uma amostra de  $n=20$ . Determinar

- $P(95 < \bar{X} < 105)$
- $P(\bar{X} - Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 0,95$

---

---

---

---

---

---

---

---

**Inferência entre parâmetros de duas populações**

Mesmo não se conhecendo as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , seria possível verificar se elas são iguais a partir de seus valores amostrais?

Se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são iguais, então  $\mu_1 - \mu_2 = 0$ .

Mas quanto vale  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Distribuição da soma ou diferença entre duas médias**

$\bar{X} \text{ A } \pm \bar{X} \text{ B}$

- Dado duas populações A e B, com médias  $\mu_A$  e  $\mu_B$  e variâncias  $\sigma_A^2$  e  $\sigma_B^2$ , respectivamente, pode-se demonstrar que a distribuição amostral de  $\bar{X} \text{ A } \pm \bar{X} \text{ B}$  é:
 
$$\mu_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \mu_1 \pm \mu_2$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad (\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$
- Se for realizada amostragem sem reposição, e a população for finita ( $\frac{n}{N} > 0,05$ ), então usa-se o fator de correção  $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ , multiplicando o termo referente a variância da população em questão.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Exemplo**

Os fabricantes de duas marcas de seringas para aplicar vacinas, retiraram amostras de cada uma das marcas com os resultados a seguir. Qual será a probabilidade de que a amostra da marca A tenha uma vida média no mínimo um ano maior do que a marca B?

Fabricantes	Furamuito (1)	Furamais (2)
Média	6,5 anos	6,0 anos
Desvio-padrão	0,9 anos	0,8 anos
n	36 tubos	49 tubos

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Distribuição Amostral das Proporções

Considerando uma população infinita, em que  $p$  é a probabilidade (ou proporção) de certo evento

A distribuição amostral de  $\hat{p}$  será:

$$\hat{p} \sim N\left(p; \frac{pq}{n}\right); q = 1 - p$$

Caso a amostragem seja realizada sem reposição e a população seja finita :

$$\hat{p} \sim N\left(p; \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right); q = 1 - p$$

---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemplo

Em uma população, a proporção de pessoas favoráveis a um pacote de serviços de uma operadora de telefonia é de 40%. Retiramos uma amostra de 300 pessoas dessa população. Determinar:

a)  $P(p - Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\hat{p}} \leq \hat{p} \leq p + Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\hat{p}}) = 0,95$

---

---

---

---

---

---

---

---



### Exemplo

Uma empresa de cartões de crédito deseja saber qual a proporção de pessoas da população possuem um novo cartão especial dessa empresa. Retira-se uma amostra de 400 pessoas, obtendo-se 8 portadores desses cartões. Definir limites de confiabilidade de 99% para a proporção populacional.

---

---

---

---

---

---

---

---



### Distribuição amostral da soma ou diferença entre proporções

$$\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2$$

Supor duas populações infinitas 1 e 2, com proporções  $p_1$  e  $p_2$ .

Destas populações retiram-se amostras  $n_1$  e  $n_2$ , então:

$$\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 \pm p_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right); \text{ sendo } q = 1 - p$$

Se a amostragem for realizada sem reposição, e a população for finita, usar o fator de correção

$\frac{N-n}{N-1}$  multiplicando na variância da população em questão.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Distribuição Amostral de t (Student)

Sabe-se que  $\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , e sua distribuição padronizada é

$$\text{dada por: } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Em muitas situações não se conhece  $\sigma^2$  ou  $\sigma$ , mas sim sua estimativa  $s^2$  ou  $s$

Precisamos substituir  $\sigma$  por seu estimador  $s$

$$\text{estatística } t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ a qual segue uma distribuição t de Student com}$$

(n-1) graus de liberdade.

Esta estatística é utilizada quando se tem amostras pequenas ( $n \leq 30$ ), pois o valor de  $s^2$  torna-se muito variável, ou seja, flutua muito de amostra para amostra. Nestas situações a distribuição deixa de ser normal padronizada.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Características da distribuição t

- a) É simétrica em relação a média (semelhante a distribuição de z)
- b) Tem forma campanular. Valores de t dependem da flutuação das estatísticas média e desvio padrão amostrais e z depende somente das mudanças da média das amostras
- c) Quando n tende para infinito, a distribuição t tende para a distribuição normal. Na prática, a aproximação é considerada boa quando  $n > 30$ .
- d) Possui n-1 graus de liberdade.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Condições para utilizar a distribuição de t de Student

- a) O tamanho da amostra é pequeno ( $n \leq 30$ )
- b)  $\sigma$  é desconhecido
- c) A população tem distribuição essencialmente normal

---

---

---

---

---

---

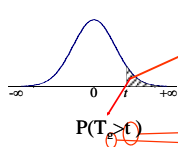
---

---

---

---

### Distribuição t de student



	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	4,045	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,747	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,581	3,707
7	1,415	1,895	2,365	3,499	3,599
8	1,397	1,860	2,306	3,435	3,555
9	1,385	1,833	2,262	3,381	3,520
10	1,377	1,812	2,228	3,341	3,493
11	1,365	1,796	2,201	3,318	3,476
12	1,356	1,782	2,179	3,298	3,463
13	1,350	1,771	2,160	3,280	3,452
14	1,345	1,761	2,145	3,264	3,443
15	1,341	1,753	2,133	3,250	3,436
16	1,337	1,746	2,120	3,238	3,431
17	1,333	1,740	2,110	3,228	3,426
18	1,330	1,734	2,103	3,220	3,422
19	1,328	1,729	2,093	3,213	3,418
20	1,325	1,725	2,086	3,208	3,415
21	1,323	1,721	2,080	3,204	3,412
22	1,321	1,717	2,074	3,200	3,410
23	1,319	1,714	2,069	3,196	3,407
24	1,318	1,711	2,064	3,192	3,405
25	1,316	1,708	2,060	3,189	3,403
26	1,315	1,706	2,056	3,187	3,401
27	1,314	1,703	2,052	3,185	3,400
28	1,313	1,701	2,048	3,183	3,399
29	1,311	1,699	2,045	3,182	3,398
30	1,310	1,697	2,042	3,181	3,397
40	1,303	1,684	2,021	3,157	3,374
50	1,299	1,676	2,009	3,143	3,368
60	1,296	1,671	2,000	3,130	3,360
70	1,289	1,658	1,980	3,118	3,351
80	1,282	1,645	1,960	3,106	3,343

$P(T_{10} > 2,764) = ?$   
 $P(T_{10} > 2,764) = 0,01$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Obter os seguintes valores da distribuição t de Student:

- a)  $t / P(-t < t < t) = 0,95$  com 10 g.l.
- b)  $t / P(-t < t < t) = 0,90$  com 20 g.l.
- c)  $t / P(t > t) = 0,05$  com 25 g.l.
- d)  $t / P(t < t) = 0,10$  com 10 g.l.
- e)  $P(-1,753 < t < 1,753)$  com 15 g.l.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática  
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

## Distribuição $\chi^2$

$P(\chi^2_0 > \chi^2) = ?$   
 $P(\chi^2_0 > 3,25) = 0,975$   
 $P(\chi^2_5 > ?) = 0,9$   
 $P(\chi^2_5 > 8,55) = 0,9$

$\nu$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,850	0,800	0,750	0,700	0,650	0,600	0,550	0,500	0,450	0,400	0,350	0,300	0,250	0,200	0,150	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	161,277	167,504	175,083	182,982	191,549	199,579	207,989	215,903	223,281	230,283	236,990	243,488	249,889	256,196	262,411	268,536	274,572	280,520	286,381	292,156	297,846	303,452	308,975	314,416	319,775
2	187,572	193,154	199,927	206,989	214,450	221,309	228,576	235,251	242,334	248,825	255,724	262,031	268,746	274,869	281,400	287,348	293,714	299,500	305,706	311,332	317,378	322,844	328,731	334,040	339,771
3	214,997	220,987	227,181	233,678	240,581	246,889	253,602	259,720	266,243	272,171	278,504	284,241	290,381	296,924	302,871	309,222	315,977	322,136	328,700	334,669	341,043	346,822	353,006	358,595	364,589
4	243,682	249,959	256,456	263,272	270,417	276,989	283,988	290,415	297,270	303,553	310,264	316,402	322,967	329,958	336,375	343,218	349,487	356,182	362,303	368,850	374,823	381,222	387,047	393,298	399,975
5	273,306	279,959	286,811	293,964	301,417	308,270	315,523	322,176	329,229	335,682	342,535	349,788	356,441	363,494	370,947	377,799	385,052	391,705	398,758	405,211	412,064	418,317	424,970	431,023	437,476
6	303,927	310,759	317,956	325,408	333,219	340,390	347,921	355,812	363,963	371,474	379,345	387,576	395,167	403,118	411,429	419,999	427,928	436,216	443,863	451,869	459,234	466,958	474,041	481,483	489,284
7	335,410	342,509	349,961	357,764	365,919	373,425	381,282	389,491	397,952	406,665	414,730	423,146	430,913	439,031	447,500	455,321	463,494	471,019	478,895	487,122	494,700	502,628	510,906	518,534	526,511
8	367,501	374,879	382,681	390,806	399,253	407,021	415,110	423,519	431,248	439,297	447,666	456,354	464,371	472,717	481,392	489,396	497,729	506,391	514,382	522,702	530,350	538,326	546,629	554,258	562,203
9	400,154	407,819	415,901	424,300	432,917	440,751	448,901	457,357	466,119	475,187	484,561	494,240	503,224	512,513	521,107	529,906	538,909	548,116	557,527	567,142	575,961	585,084	594,511	603,242	612,277
10	433,247	441,101	449,451	458,196	467,235	476,568	486,194	496,112	506,321	516,811	527,581	538,631	548,960	559,568	570,455	581,621	593,066	604,789	616,791	629,071	641,618	654,431	667,509	680,851	694,457
11	466,700	474,833	483,451	492,354	501,541	510,912	520,467	530,296	540,399	550,776	561,420	572,331	583,500	594,927	606,612	618,556	630,759	643,221	655,941	668,918	682,151	695,639	709,381	723,377	737,621
12	500,510	508,923	517,801	526,944	536,351	545,922	555,657	565,556	575,719	586,146	596,837	607,792	618,911	630,294	641,941	653,852	666,027	678,465	691,166	704,129	717,354	730,841	744,581	758,573	772,817
13	534,673	543,363	552,599	562,082	571,813	581,690	591,713	601,882	612,296	622,955	633,859	644,908	656,102	667,540	679,322	691,347	703,615	716,126	728,880	741,877	755,117	768,600	782,327	796,299	810,517
14	569,186	578,153	587,651	597,384	607,351	617,552	627,887	638,456	649,259	660,296	671,567	683,072	694,811	706,784	718,991	731,433	744,111	757,024	770,171	783,552	797,167	811,016	825,100	839,419	853,965
15	604,047	613,301	623,059	633,022	643,189	653,560	664,135	674,914	685,897	697,084	708,475	720,070	731,869	743,872	756,079	768,490	781,105	793,924	806,947	820,174	833,605	847,340	861,379	875,722	890,369
16	639,253	648,793	658,801	669,068	679,593	690,376	701,417	712,715	724,270	736,081	748,147	760,468	773,044	785,875	798,964	812,311	825,914	839,773	853,887	868,256	882,879	897,756	912,889	928,278	943,923
17	674,802	684,627	694,991	705,604	716,466	727,577	738,936	750,543	762,398	774,501	786,852	799,450	812,294	825,383	838,717	852,294	866,114	880,177	894,483	909,032	923,834	938,881	954,174	969,713	985,507
18	710,692	720,803	731,491	742,464	753,731	765,292	777,147	789,295	801,736	814,470	827,497	840,817	854,429	868,333	882,529	896,917	911,596	926,565	941,824	957,372	973,210	989,337	1005,764	1022,491	1039,518
19	746,920	757,317	768,251	779,422	790,839	802,501	814,416	826,583	839,002	851,673	864,595	877,767	891,189	904,961	919,082	933,452	948,070	962,936	978,050	993,412	1009,021	1024,877	1040,980	1057,331	1073,930
20	783,394	794,081	805,351	816,904	828,741	840,872	853,307	866,045	879,086	892,430	906,076	920,023	934,270	948,817	963,663	978,808	994,252	1009,995	1026,037	1042,378	1059,018	1075,956	1093,193	1110,729	1128,564
21	820,112	831,089	842,691	854,528	866,601	878,919	891,482	904,290	917,343	930,641	944,188	957,984	972,029	986,323	1000,866	1015,658	1030,700	1046,001	1061,561	1077,380	1093,458	1109,795	1126,391	1143,247	1160,364
22	857,073	868,349	880,291	892,508	904,991	917,749	930,782	944,090	957,673	971,531	985,664	1000,071	1014,752	1029,707	1044,935	1060,436	1076,209	1092,254	1108,571	1125,160	1142,021	1159,154	1176,560	1194,239	1212,181
23	894,275	905,849	918,151	930,792	943,659	956,751	970,077	983,638	997,434	1011,465	1025,735	1040,243	1054,989	1069,972	1085,192	1100,636	1116,303	1132,194	1148,309	1164,648	1181,211	1198,000	1215,013	1232,247	1249,701
24	931,716	943,589	955,751	968,192	980,901	993,879	1007,126	1020,642	1034,427	1048,481	1062,804	1077,405	1092,283	1107,437	1122,866	1138,570	1154,549	1170,793	1187,302	1204,076	1221,114	1238,416	1255,983	1273,815	1291,911
25	969,394	981,565	994,091	1006,962	1020,081	1033,448	1047,063	1060,926	1075,037	1089,394	1104,006	1118,873	1134,004	1149,398	1165,054	1180,972	1197,153	1213,596	1230,301	1247,268	1264,497	1281,989	1299,744	1317,762	1336,044
26	1007,307	1020,076	1033,251	1046,732	1060,519	1074,611	1088,908	1103,409	1118,114	1133,023	1148,136	1163,452	1178,971	1194,693	1210,618	1226,845	1243,374	1260,205	1277,338	1294,772	1312,507	1330,542	1348,877	1367,511	1386,444
27	1045,452	1058,619	1072,151	1086,042	1100,287	1114,886	1129,739	1144,845	1160,204	1175,816	1191,681	1207,800	1224,173	1240,800	1257,681	1274,816	1292,205	1309,848	1327,745	1345,897	1364,306	1382,973	1401,897	1421,078	1440,515
28	1083,827	1097,492	1111,591	1126,022	1140,769	1155,831	1171,207	1186,896	1202,898	1219,213	1235,841	1252,782	1269,936	1287,303	1304,882	1322,674	1340,679	1358,897	1377,328	1395,971	1414,826	1433,893	1453,172	1472,663	1492,365
29	1122,430	1136,493	1151,001	1165,854	1181,051	1196,592	1212,477	1228,605	1244,976	1261,590	1278,447	1295,547	1312,890	1330,477	1348,308	1366,383	1384,701	1403,262	1422,066	1441,113	1460,403	1480,936	1501,712	1522,731	1543,992
30	1161,261	1175,712	1190,651	1205,978	1221,691	1237,789	1254,182	1270,869	1287,850	1305,125	1322,694	1340,557	1358,713	1377,161	1395,901	1414,932	1434,255	1453,870	1473,777	1493,976	1514,467	1535,250	1556,325	1577,692	1599,350
31	1200,318	1215,167	1230,501	1246,218	1262,319	1278,804	1295,683	1312,956	1330,523	1348,384	1366,539	1384,987	1403,728	1422,761	1442,086	1461,703	1481,611	1501,810	1522,300	1543,081	1564,152	1585,513	1607,164	1629,105	1651,336
32	1239,599	1254,846	1270,571	1286,672	1303,159	1320,032	1337,291	1354,936	1372,967	1391,384	1409,187	1427,276	1445,651	1464,311	1483,255	1502,484	1521,997	1541,794	1561,875	1582,240	1602,889	1623,822	1645,039	1666,540	1688,325
33	1279,104	1294,749	1310,871	1327,370	1344,243	1361,491	1379,124	1397,141	1415,542	1434,327	1453,495	1473,047	1492,983	1513,204	1533,710	1554,501	1575,577	1596,937	1618,580	1640,506	1662,814	1685,404	1708,276	1731,429	1754,863
34	1318,831	1334,874	1351,391	1368,281	1385,544	1403,181	1421,192	1439,577	1458,336	1477,469	1496,976	1516,857	1537,003	1557,424	1578,120	1599,091	1620,337	1641,858	1663,654	1685,725	1708,071	1730,692	1753,588	1776,759	1800,205
35	1358,772	1375,113	1391,921	1409,094	1426,631	1444,532	1462,807	1481,455	1500,476	1519,870	1539,637	1559,776	1580,187	1600,870	1621,825	1643,052	1664,551	1686,321	1708,361	1730,671	1753,250	1776,098	1799,215	1822,600	1846,263
36	1398,917	1415,556	1432,661	1450,131	1467,964	1486,161	1504,721	1523,644	1542,931	1562,582	1582,597	1602,976	1623,719	1644,726	1665,997	1687,534	1709,337	1731,405	1753,737	1776,333	1799,197	1822,329	1845,728	1869,394	1893,326
37	1439,262	1456,299	1473,801	1491,664	1509,891	1528,481	1547,434	1566,751	1586,431	1606,474	1626,880	1647,649	1668,781	1690,276	1712,134	1734,355	1756,939	1779,785	1802,8						

