INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Prof. Dr. Rogério de Melo Costa Pinto

Curso de Pós-Graduação

Especialização em Estatística Empresarial

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

DELINEAMENTOS EXPERIMENTAIS

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

PRINCÍPIOS BÁSICOS DA EXPERIMENTAÇÃO

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- A pesquisa científica está constantemente se utilizando de experimentos para provar suas hipóteses.

- Os experimentos são regidos por alguns princípios básicos necessários para que as conclusões que venham a ser obtidas se tornem válidas.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Conceitos

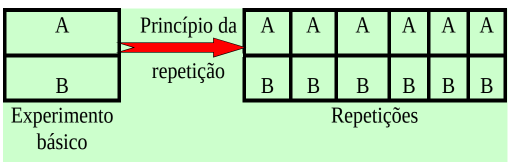
- Experimento ou Ensaio
- Tratamento
- Unidade Experimental ou Parcela
- Delineamento experimental

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Princípio da Repetição

Consiste na reprodução do experimento básico e tem por finalidade propiciar a obtenção de uma estimativa do erro experimental.

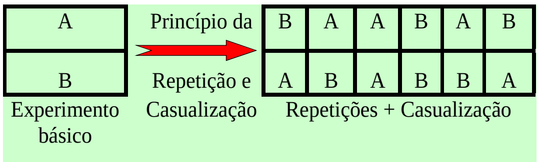
$$\text{variância da média} = \frac{s^2}{r}$$



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Princípio da Casualização

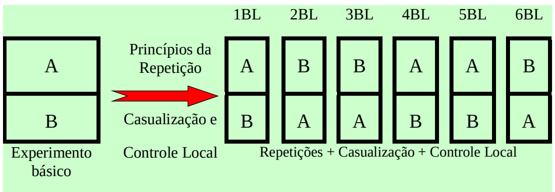
- Tem por finalidade propiciar a todos os tratamentos a mesma probabilidade de serem designados a qualquer das unidades experimentais.



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Princípio do Controle Local

- Tem por finalidade dividir um ambiente heterogêneo em sub-ambientes homogêneos e tornar o delineamento experimental mais eficiente, pela redução do erro experimental



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Pressuposições do modelo

- Aditividade dos efeitos
- Homogeneidade das variâncias
- Erros independentes e normalmente distribuídos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Normalidade dos erros

Testes	Característica
Qui-quadrado (aderência)	n >50 (com agrupamento)
Kolmogorov-Smirnov (Liliefors)	Qualquer n
Shapiro-Wilk	n < 50
Levene	Aproximado

***n*: número de parcelas**

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

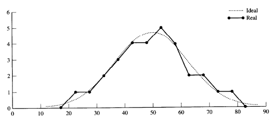
Análise paramétrica ou não?

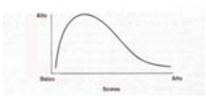
A opção por testes paramétricos ou não paramétricos tem a ver com as condições que exigem para uma correta utilização. A utilização de testes paramétricos exige que:

- ✓**A variável dependente seja de escala intervalar;**
- ✓**Normalidade da distribuição**
- ✓**Homogeneidade das variâncias nos grupos**
- ✓**Independência das observações**

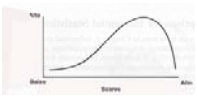
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- **Representação gráfica**
- **Apreciação do valor da média, mediana e moda**





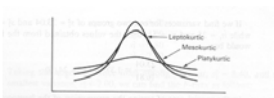
Desvio positivo



Desvio negativo

Desvios

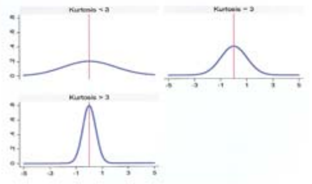
Achatamentos (kurtosis)



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

O desvio – *skewness* é tanto maior quanto mais se afastar de zero. Se o desvio for positivo (>0), a distribuição desvia para a direita com mais observações do lado esquerdo. Se o desvio tiver sinal negativo temos mais observações do lado direito da curva.

Kurtosis



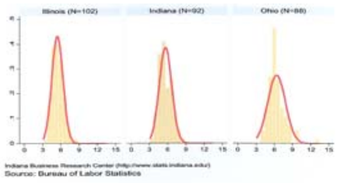
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Testes e desvios à normalidade

Para analisar a normalidade de uma distribuição usam-se m gráficos e numéricos.

- **Métodos gráficos:**
  - ✓ diagrama stem and leaf, histograma, o diagrama de extremos e quartis (boxplot), os diagramas P-P e Q-Q plots (normal e detrended).
- **Métodos numéricos:**
  - ✓ estatísticas descritivas: skewness e kurtosis
  - ✓ Teste não paramétrico de aderência à normal *Kolmogorov-Smirnov* (K-S) e Qui-quadrado.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial



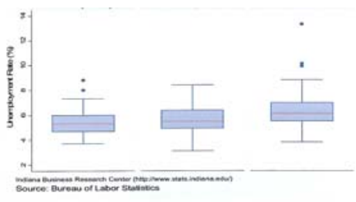
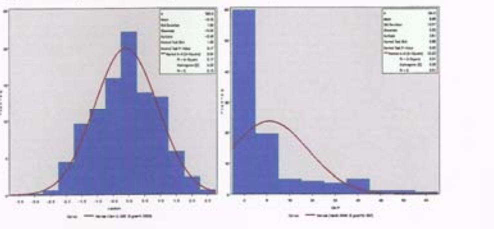


Figure 9. Histograms of Normally and Non-normally Distributed Variables



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

```
Frequency    Stem &  Leaf

    2.00       -2 .  &
   13.00       -2 .  011&
   27.00       -1 .  555667889
   56.00       -1 .  0011112222333333444
   64.00       -0 .  555555667777888889999
  116.00       -0 .  000000011111111122222222223333333334444444
   80.00        0 .  000001111112222223333334444
   68.00        0 .  5555566677777888899999
   46.00        1 .  000111122233444
   23.00        1 .  5567789
    4.00        2 .  4&
    1.00        2 .  &

Stem width:   1.00
Each leaf:      3 case(s)
```

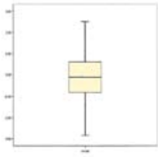
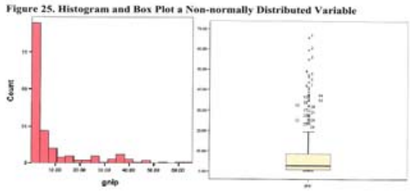


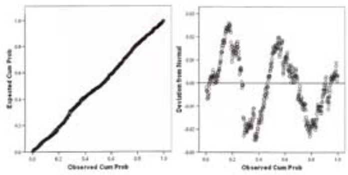
Figure 25. Histogram and Box Plot a Non-normally Distributed Variable

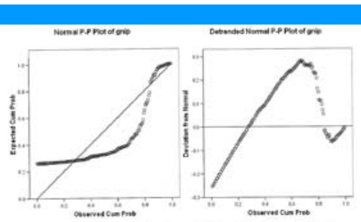


Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

P-P plots
(normal
e detrended)

Distribuição normal





Distribuição que
não é
normal

Teste de Aderência

Exemplo: Deseja-se testar a hipótese de que um dado seja honesto. Para tanto, joga-se o mesmo 1200 vezes anotando-se os resultados:

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	180	207	191	203	210	209	1200

$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$ (dado honesto)

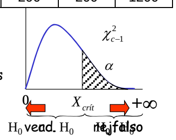
H_1: pelo menos algum $p_i \neq 1/6$

Se H_0 é verdadeira, então

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	180	207	191	203	210	209	1200
Freq. Abs. Esp.	200	200	200	200	200	200	1200

$$X = \sum_{i=1}^{c} \frac{\left(FAObs_i - FAEsp_i\right)^2}{FAEsp_i} \sim \chi^2_{c-1}$$

c é o número de classes



Teste de Aderência

Exemplo: Deseja-se testar a hipótese de que um dado seja honesto. Para tanto, joga-se o mesmo 1200 vezes anotando-se os resultados (tabela abaixo).

$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$ (dado honesto)

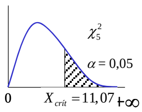
$H_1: p_i \neq 1/6$

Se H_0 é verdadeira, então

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	180	207	191	203	210	209	1200
Freq. Abs. Esp.	200	200	200	200	200	200	1200

$$X = \frac{(180-200)^2}{200} + \frac{(207-200)^2}{200} + \ldots + \frac{(209-200)^2}{200} = 3,6$$

Conclusão: considerando 5% de significância, aceita-se H_0, ou seja, não há razões para discordar que o dado seja honesto.



Teste de Normalidade / Teste de Aderência

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal com média μ igual a 3,6 e variância σ^2 igual a 0,8.

2,2	4,1	3,5	4,5	5,0	3,7	3,0	2,6	3,4	1,6
3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7	2,5	4,3	4,9	3,6
2,9	3,3	3,9	3,1	4,8	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1
1,9	3,4	4,7	3,8	3,0	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

$H_0 : Y \sim N(\mu = 3,6;\ \sigma^2 = 0,8)$ $\Leftrightarrow$ $H_0 : (Y - 3,6)/0,8944 = Z \sim N(0,1)$

$H_1: Y \sim ?$ $\qquad$ $H_1: (Y - 3,6)/0,8944 \sim ?$

Valores padronizados:

-1,57	0,56	-0,11	1,01	1,57	0,11	-0,67	-1,12	-0,22	-2,24
-0,56	-0,34	0,22	-0,56	1,23	0,11	-1,23	0,78	1,45	0,00
-0,78	-0,34	0,34	-0,56	1,34	-0,56	0,11	0,89	-0,45	0,56
-1,90	-0,22	1,23	0,22	-0,67	-1,12	0,34	-0,67	0,67	-0,11

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Normalidade / Teste de Aderência

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal com média μ igual a 3,6 e variância σ^2 igual a 0,8.

Valores padronizados:

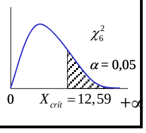
-1,57	0,56	-0,11	1,01	1,57	0,11	-0,67	-1,12	-0,22	-2,24
-0,56	-0,34	0,22	-0,56	1,23	0,11	-1,23	0,78	1,45	0,00
-0,78	-0,34	0,34	-0,56	1,34	-0,56	0,11	0,89	-0,45	0,56
-1,90	-0,22	1,23	0,22	-0,67	-1,12	0,34	-0,67	0,67	-0,11

Agrupando-se os valores padronizados em 7 classes equiprováveis tem-se

Limites	FAObs	FAEsp
-∞ a -1,068	6	40/7
-1,068 a -0,566	4	40/7
-0,566 a -0,180	9	40/7
-0,180 a 0,180	6	40/7
0,180 a 0,566	6	40/7
0,566 a 1,068	4	40/7
1,068 a +∞	5	40/7

$$X = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(FAObs_i - FAEsp_i\right)^2}{FAEsp_i} \sim \chi_6^2$$

$$X = 3,05$$



Conclusão:
aceita-se H_0 a 5% sig., ou seja, $Y \sim N(\mu = 3,6;\ \sigma^2 = 0,8)$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Aderência

OBSERVAÇÕES:

- Deve-se agrupar os dados em 2 a 20 classes excludentes (ideal ≥ 5);
- Se houver apenas 2 classes, o valor esperado de cada uma deve ser ≥ 5;
- Se houver mais que 2 classes, não mais de 20% dos valores esperados devem ser < 5, e nenhum deve ser nulo;
- Não é necessário que as classes sejam equiprováveis;
- Este teste não é sensível ao ordenamento das classes; e
- Para cada parâmetro estimado, perde-se 1 grau de liberdade.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Normalidade / Teste de Aderência

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

2,2	4,1	3,5	4,5	5,0	3,7	3,0	2,6	3,4	1,6
3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7	2,5	4,3	4,9	3,6
2,9	3,3	3,9	3,1	4,8	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1
1,9	3,4	4,7	3,8	3,0	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

$\bar{X} = 3,5275 \quad \rightarrow \mu$ $\qquad s^2 = 0,6528 \quad \rightarrow \sigma^2$

$H_0: Y \sim N(\mu = 3,5275;\ \sigma^2 = 0,6528)$
$H_1: Y \sim ?$

$\Leftrightarrow$

$H_0: (Y - 3,5275)/0,8080 = Z \sim N(0,1)$
$H_1: (Y - 3,5275)/0,8080 \sim ?$

Valores padronizados:

-1,64	0,71	-0,03	1,20	1,82	0,21	-0,65	-1,15	-0,16	-2,39
-0,53	-0,28	0,34	-0,53	1,45	0,21	-1,27	0,96	1,70	0,09
-0,78	-0,28	0,46	-0,53	1,57	-0,53	0,21	1,08	-0,41	0,71
-2,01	-0,16	1,45	0,34	-0,65	-1,15	0,46	-0,65	0,83	-0,03

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Normalidade / Teste de Aderência

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

Valores padronizados:

-1,64	0,71	-0,03	1,20	1,82	0,21	-0,65	-1,15	-0,16	-2,39
-0,53	-0,28	0,34	-0,53	1,45	0,21	-1,27	0,96	1,70	0,09
-0,78	-0,28	0,46	-0,53	1,57	-0,53	0,21	1,08	-0,41	0,71
-2,01	-0,16	1,45	0,34	-0,65	-1,15	0,46	-0,65	0,83	-0,03

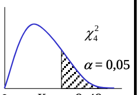
Agrupando-se os valores padronizados em 7 classes equiprováveis tem-se

Limites	FAObs	FAEsp
-∞ a -1,068	6	40/7
-1,068 a -0,566	4	40/7
-0,566 a -0,180	7	40/7
-0,180 a 0,180	5	40/7
0,180 a 0,566	7	40/7
0,566 a 1,068	4	40/7
1,068 a +∞	7	40/7

7-1-2 = 4

$$X = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(FAObs_i - FAEsp_i\right)^2}{FAEsp_i} \sim \chi_4^2$$

$$X = 2$$



Conclusão:
aceita-se H_0 a 5% sig., ou seja, $Y \sim N$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo (usado no teste χ^2): Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer X. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal com média μ igual a 3,6 e variância σ^2 igual a 0,8.

2,2	4,1	3,5	4,5	5,0	3,7	3,0	2,6	3,4	1,6
3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7	2,5	4,3	4,9	3,6
2,9	3,3	3,9	3,1	4,8	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1
1,9	3,4	4,7	3,8	3,0	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

$H_0: X \sim N(\mu = 3,6;\ \sigma^2 = 0,8)$
$H_1: X \sim ?$

$\Leftrightarrow$

$H_0: (X - 3,6)/0,8944 = Z \sim N(0,1)$
$H_1: (X - 3,6)/0,8944 \sim ?$

Valores padronizados:

-1,57	0,56	-0,11	1,01	1,57	0,11	-0,67	-1,12	-0,22	-2,24
-0,56	-0,34	0,22	-0,56	1,23	0,11	-1,23	0,78	1,45	0,00
-0,78	-0,34	0,34	-0,56	1,34	-0,56	0,11	0,89	-0,45	0,56
-1,90	-0,22	1,23	0,22	-0,67	-1,12	0,34	-0,67	0,67	-0,11

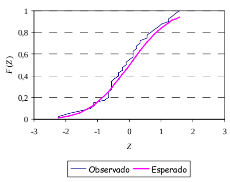
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo (usado no teste χ^2): Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer X. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal com média μ igual a 3,6 e variância σ^2 igual a 0,8.

Valores padronizados ordenados:

-2,24	-1,9	-1,57	-1,23	-1,12	-1,12	-0,78	-0,67	-0,67	-0,67
-0,56	-0,56	-0,56	-0,56	-0,45	-0,34	-0,34	-0,22	-0,22	-0,11
-0,11	0,00	0,11	0,11	0,11	0,22	0,22	0,34	0,34	0,56
0,56	0,67	0,78	0,89	1,01	1,23	1,23	1,34	1,45	1,57



$$F_{obs}(Z_i) = \frac{i}{n} \qquad \Rightarrow F_{obs}(-1,57) = \frac{3}{40}$$

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \qquad \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,57) = 0,0582$$

$$D = máx\left|F_{obs}(Z_i) - F_{esp}(Z_i)\right|$$

valores críticos tabelados!

Se D maior que $D_{crít}$, então conclui-se que a distribuição teórica não é válida, com certo nível de significância.

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Tamanho da amostra (N)	Nível de significância para $D = máx\left\|F_{obs}(X) - F_{esp}(X)\right\|$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
Mais de 35	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

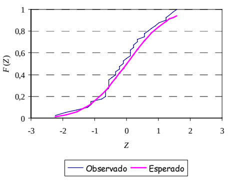
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo (usado no teste χ^2): Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer X. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal com média μ igual a 3,6 e variância σ^2 igual a 0,8.

Valores padronizados ordenados:

-2,24	-1,9	-1,57	-1,23	-1,12	-1,12	-0,78	-0,67	-0,67	-0,67
-0,56	-0,56	-0,56	-0,56	-0,45	-0,34	-0,34	-0,22	-0,22	-0,11
-0,11	0,00	0,11	0,11	0,11	0,22	0,22	0,34	0,34	0,56
0,56	0,67	0,78	0,89	1,01	1,23	1,23	1,34	1,45	1,57



$$F_{obs}(Z_i) = \frac{i}{n} \quad \Rightarrow F_{obs}(-1,57) = \frac{3}{40}$$

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \quad \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,57) = 0,0582$$

$$D = máx\left|F_{obs}(Z_i) - F_{esp}(Z_i)\right|$$

$$D = 0,0919 \qquad D_{crít} = 0,2150 \quad (\alpha = 5\%)$$

Conclusão: pode-se aceitar a hipótese de que os dados provenham de uma normal, a 5% de significância.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Teste de Kolmogorov-Smirnov

OBSERVAÇÕES:

- É o teste mais apropriado para dados ordenados;
- Ideal quando a variável tem distribuição contínua; e
- Não há uma modificação quando se estima os parâmetros de uma distribuição (não há perdas de graus de liberdade como no teste χ^2).

Testes numéricos de aderência à normalidade

Ho: a distribuição da variável é normal

H1: a distribuição da variável não é normal

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	Df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Normal	.027	500	.200(*)	.996	500	.168

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
grip	.284	164	.000	.663	164	.000

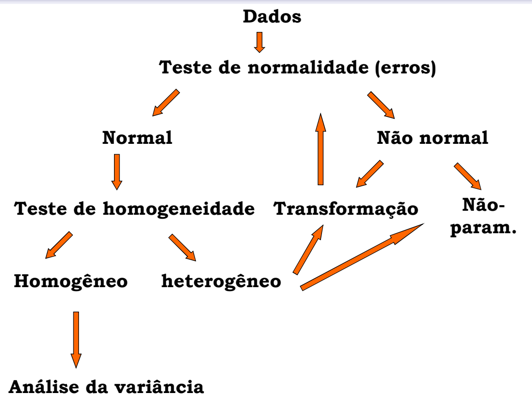
a Lilliefors Significance Correction

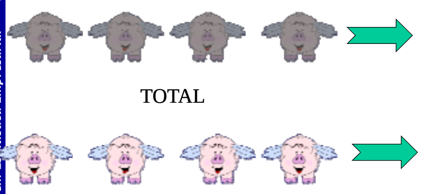
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Homogeneidade das variâncias

Testes	Característica
$F_{máx}$ de Hartley	Baixa eficiência Deve ser evitado
Bartlett	Mais utilizado Alta precisão

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial





DENTRO

TOTAL

DENTRO

ENTRE

Estatística =>
efeitos aleatórios x efeitos de tratamentos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Ex: A gerência de um depósito que armazena cargas aéreas de pequeno porte está estudando o peso das cargas que chegam ao seu terminal no interior de São Paulo. Usualmente, o terminal recebe 3 tipos de cargas: doméstica (A), administrativa (B) e equipamentos industriais (C). Deseja-se verificar se, em média, existe diferenças entre os pesos dos 3 tipos de cargas. Ao longo de 1 mês, cargas foram colhidas aleatoriamente e seus pesos foram aferidos, fornecendo os dados (em kg).

					Média	Variância	Desvio-padrão
A	77	81	71	76	77	15,50	3,937
B	72	58	74	66	68	40,00	6,325
C	76	85	82	80	80	13,50	3,674

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Variação entre,dentro e total

$$VE = SQEntre\ Trat = SQTrat = r.\sum_{i=1}^{t}(\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}})^2$$

$$VD = SQDentro\ de\ trat. = SQErro = SQ\,Residuo = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2$$

em que:

Y_{ij} = *valor observado na parcela que recebeu o tratamento i na repetição j*

$$VT = SQTotal = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{\overline{Y}})^2$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Desenvolvendo as fórmulas de SQ, podemos reescreve-las como:

$$SQTrat = \sum_{i=1}^{t} \frac{T_i^2}{r_j} - C$$

em que:

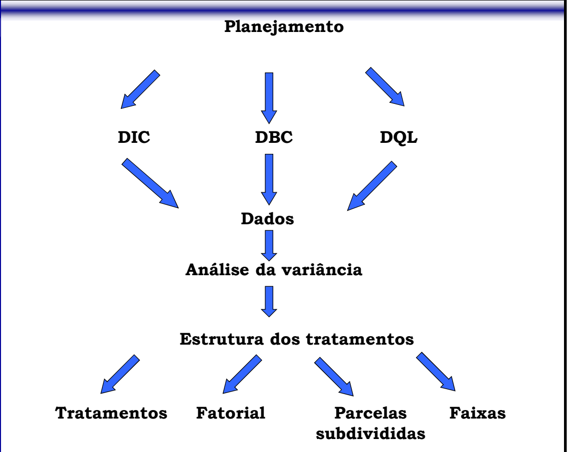
T_i = total do trat i

$$C = \text{fator de correção} = \frac{(\sum\sum Y_{ij})^2}{t.r}$$

$$SQTotal = \sum\sum Y_{ij}^2 - C$$

SQResíduo = SQTotal - SQTrat

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de variância

As hipóteses na análise de variância são:

H_o: $t_1 = t_2 = ... = t_t$

H_1: no mínimo 1 trat. difere

$$QMTrat = \frac{SQTrat}{G.L.\,Trat} \qquad QM\,Resíduo = \frac{SQ\,Resíduo}{G.L\,Resíduo}$$

$$F_{calc} = \frac{QMTrat}{QM\,Resíduo}$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de variância de um experimento inteiramente casualizado com t tratamentos e r repetições

Fonte de Variação	G. L.	S. Q.	Q. M.	F_{calc}	$F\alpha(v_1,v_2)$
Tratamento	t-1	SQTrat	QMTrat	F calculado	F tabela
Resíduo	t(r-1)	SQResíduo	QMResíduo		
Total	tr-1	SQTotal			

G. L. = graus de liberdade

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Croqui do delineamento inteiramente casualizado

Cinco tratamentos (A,B,C e D) e cinco repetições

A	B	A	C	C
B	D	A	C	D
A	E	C	B	E
E	D	E	B	D
B	C	A	E	D

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Ex: A Empresa IHARA desenvolveu 4 inseticidas para controlar pulgões em hortaliças. Para isso, instalou um experimento visando o controle do pulgão em cultura do pepino, com 6 repetições dos seguintes tratamentos:

A – Testemunha
B – Azifós etílico
C – Supracid 40CE dose 1
D – Supracid 40CE dose 2
E – Diazinon 60CE

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Número de pulgões coletados 36 horas após a pulverização

Trat.	REPETIÇÕES 1	2	3	4	5	6	TOTAIS	s^2
A	2370	1687	2592	2283	2910	3020	14862	233749,60
B	1282	1527	871	1025	825	920	6450	75558,80
C	562	321	636	317	485	842	3163	40126,17
D	173	127	132	150	129	227	938	1502,27
E	193	71	82	62	96	44	548	2791,87

Fonte: Banzatto & Kronka, 1992.

$$H_c = \frac{S^2_{\max}}{S^2_{\min}} = \frac{233749{,}60}{1502{,}27} = 155{,}60^{**}$$

Rejeita-se a hipótese de homocedasticidade e concluímos pela heterocedasticidade dos dados

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Número de pulgões coletados 36 horas após a pulverização transformados em ln x.

Trat.	REPETIÇÕES 1	2	3	4	5	6	TOTAIS	s^2
A	7,77	7,43	7,86	7,73	7,97	8,01	46,78	0,0443
B	7,15	7,33	6,76	6,93	6,71	6,82	41,72	0,0583
C	6,33	5,77	6,45	5,75	6,18	6,73	37,23	0,1496
D	5,15	4,84	4,88	5,01	4,85	5,42	30,17	0,0514
E	5,26	4,26	4,40	4,12	4,56	3,78	26,40	0,2488

Fonte: Banzatto & Kronka, 1992.

$$H_c = \frac{S^2_{\max}}{S^2_{\min}} = \frac{0{,}2488}{0{,}0443} = 5{,}62^{NS}$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

$$SQ_{TOTAL} = \left(7{,}77^2 + 7{,}15^2 + \ldots + 3{,}78^2\right) - \left(\frac{182{,}33^2}{30}\right) = 1156{,}8528$$

$$SQTrat = \frac{1}{6}\left(46{,}78^2 + 41{,}72^2 + \ldots + 26{,}40^2\right) - \left(\frac{182{,}33^2}{30}\right) = 45{,}9141$$

$$SQ_{\mathrm{Res}} = SQ_{TOTAL} - SQ_{Trat.} = 2{,}7613$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de variância do experimento

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	4	45,9141	11,4785	103,92**
Resíduo	25	2,7613	0,1105	
Total	29	48,6754		

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Cálculo das médias dos tratamentos e erro padrão

$$\hat{m}_A = \frac{46,7836}{6} = 7,7973 \qquad \hat{m}_B = 6,9549 \qquad \hat{m}_C = 6,2062$$

$$\hat{m}_D = 5,0293 \qquad \hat{m}_E = 4,4013$$

$$S_{(\hat{m})} = \frac{s}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{QM_{Res.}}}{\sqrt{j}} = \frac{\sqrt{0,1105}}{\sqrt{6}} = 0,1357$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Aplicação do teste Tukey às médias de tratamentos

$$\Delta = q\frac{s}{\sqrt{r}} = q.s_{(\hat{m})} = 4,16 \text{ x } 0,1357 = 0,5645$$

Médias dos tratamentos e teste de Tukey.

Tratamentos	Médias Transformadas	Médias não Transformadas
A - Testemunha	7,7973 a	2434
B - Azifós etílico	6,9549 b	1048
C - Supracid 40CE dose 1	6,2062 c	496
D - Supracid 40CE dose 2	5,0293 d	153
E – Diazinon 60CE	4,4013 e	82
$s_{(\hat{m})}$	0,1357	
Δ (5%)	0,5645	

Croqui do delineamento de blocos casualizados

Bloco I	**A**	**B**	**D**	**C**	**E**
Bloco II	**B**	**E**	**A**	**C**	**D**
Bloco III	**A**	**E**	**C**	**B**	**D**
Bloco IV	**D**	**C**	**E**	**B**	**A**
Bloco V	**B**	**C**	**A**	**E**	**D**

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- Calculo das somas de quadrados (SQ)

a) Soma de quadrados de tratamentos (SQTrat)

$$SQTrat = \frac{\sum T_i^2}{b} - C$$

$$C = \frac{(\sum \sum Y_{ij})^2}{t.b}$$

b) Soma de quadrados total (SQTotal)

$$SQTotal = \sum \sum Y_{ij}^2 - C$$

c) Soma de quadrados de Blocos (SQBlocos)

$$SQBlocos = \frac{\sum B_j^2}{t} - C$$

d) Soma de quadrados de resíduo (SQResíduo)

SQResíduo = SQTotal – SQTrat – SQBlocos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- Quadro de análise de variância

FV	GL	SQ	QM	F
Bloco	b-1	SQBloco	QMBloco	F_{Bloco}
Trat	t-1	SQTrat	QMTrat	F_{Trat}
Resíduo	(t-1).(b-1)	SQRes	QMRes	
Total	tb-1	SQTotal		

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

- **Ex: Um experimento foi realizado por uma empresa farmacêutica para verificar o efeito da dieta alimentar para bebês recém nascidos, utilizando-se 5 tratamentos e 4 repetições. Os 5 tipos de dietas foram ministradas durante uma semana e depois obteve-se o ganho de peso dos bebês. Esse experimento foi realizado em 4 hospitais particulares Blocos).**

Croqui da distribuição dos tratamentos e ganhos de peso (gramas).

1º Bloco	(3) 140,73	(1) 142,36	(4) 150,88	(5) 153,49	(2) 139,28
2º Bloco	(2) 137,77	(5) 165,02	(4) 135,83	(1) 144,78	(3) 134,06
3º Bloco	(4) 136,97	(2) 144,44	(5) 151,75	(3) 136,07	(1) 145,19
4º Bloco	(1) 138,88	(3) 144,11	(4) 136,36	(2) 130,61	(5) 150,22

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Ganho de peso dos bebês, em gramas.

TRATAMENTOS	BLOCOS 1	2	3	4	TOTAIS
1	142,36	144,78	145,19	138,88	571,21
2	139,28	137,77	144,44	130,61	552,10
3	140,73	134,06	136,07	144,11	554,97
4	150,88	135,83	136,97	136,36	560,04
5	153,49	165,02	151,75	150,22	620,48
TOTAIS	726,74	717,46	714,42	700,18	2858,80

Fonte: Banzatto & Kronka, 1992.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

$$SQ_{TOTAL} = (142{,}36^2 + \ldots + 150{,}22^2) - \frac{2858{,}80^2}{20} = 1273{,}9522$$

$$SQ_{TRAT} = \frac{1}{4}(571{,}2^2 + \ldots + 620{,}48^2) - \frac{2858{,}80^2}{20} = 794{,}9298$$

$$SQ_{BLOCOS} = \frac{1}{5}(726{,}74^2 + \ldots + 700{,}18^2) - \frac{2858{,}80^2}{20} = 72{,}6976$$

$$SQ_{Res} = SQ_{TOTAL} - SQ_{TRAT} - SQ_{BLOCOS} = 406{,}3248$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de variância do experimento

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	4	794,9298	198,7325	5,87**
Blocos	3	72,6976	24,2325	$0{,}72^{NS}$
Resíduo	12	406,3248	33,8604	
Total	19	1273,9522		

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

$$\hat{m}_1 = \frac{571{,}21}{4} = 142{,}80$$

$$\hat{m}_3 = 138{,}74$$

$$\hat{m}_2 = 138{,}03 \qquad \hat{m}_4 = 140{,}01 \qquad \hat{m}_5 = 155{,}12$$

$$s_{(\hat{m})} = \frac{s}{\sqrt{j}} = \frac{\sqrt{QM_{Res}}}{\sqrt{j}} = \frac{\sqrt{33{,}8604}}{\sqrt{4}} = 2{,}91$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

$$\Delta = q\frac{s}{\sqrt{r}} = q.s_{(\hat{m})} = 4{,}51 \text{ x } 2{,}91 = 13{,}12$$

Médias dos tratamentos e teste de Tukey.

Tratamentos	Médias
5	155,12 a
1	142,80 b
4	140,01 c
3	138,74 d
2	138,03 e

Tabela 6 - Amplitude Total Studentizada (q) para uso no teste de Tukey (α = 0,05)

	K											
v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	18,00	27,00	32,80	37,10	40,40	43,10	45,40	47,40	49,10	52,00	55,40	59,60
2	6,09	8,30	9,80	10,90	11,70	12,40	13,00	13,50	14,00	14,70	15,70	16,80
3	4,50	5,91	6,82	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,95	10,50	11,20
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83	8,21	8,66	9,23
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99	7,32	7,72	8,21
6	3,46	4,34	4,90	5,31	5,63	5,89	6,12	6,32	6,49	6,79	7,14	7,59
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,43	6,76	7,17
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,18	6,48	6.87
9	3,20	3,95	4,42	4,76	5,02	5,24	5,43	5,60	5,74	5,98	6,28	6,64
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60	5,83	6,11	6,47
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,71	5,99	6,33
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,40	5,62	5,88	6,21
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,53	5,79	6,11
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,46	5,72	6,03
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,60	4,78	4,94	5,08	5,20	5,40	5,65	5,96
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,35	5,59	5,90
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,71	4,86	4,99	5,11	5,31	5,55	5,84
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07	5,27	5,50	5,79
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,23	5,46	5,75
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,20	5,43	5,71
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,10	5,32	5,59
30	2,89	3,49	3,84	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,83	5,00	5,21	5,48
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,81	5,00	5,24
120	2,80	3,36	3,69	3,92	4,10	4,24	4,36	4,48	4,56	4,72	4,90	5,13

K = Número de tratamentos
v = Graus de liberdade do resíduo

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tratamentos ou fatores

- **Qualitativos**
  - **Comparações múltiplas**
    - Tukey
    - Duncan
    - Scott-Knott
    - SNK
  - **Contrastes**
    - Scheffé
    - Bonferroni
    - *t*
    - *F*
    - Dunnett
- **Quantitativos**
  - **Regressões**
    - Lineares
    - Não Lineares

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tratamentos ou fatores qualitativos
Comparações múltiplas

Testes	Quando utilizar
Tukey	Alto rigor
Duncan	Baixo rigor
SNK	Rigor intermediário
Scott-Knott	Separação de grupos exclusivos

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Exemplo de comparações múltiplas

Produtos	Tukey	Duncan	Scott-Knott
A=94,0%	a	a	a
B=88,5%	ab	ab	b
C=86,5%	ab	b	b
D=80,5%	bc	c	c
E=77,5%	cd	cd	c
F=73,0%	cd	de	d
G=71,0%	d	e	d

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Tratamentos ou fatores qualitativos
Contrastes

Testes	Quando utilizar
Teste *t* de "student"	Comparação entre duas médias
Scheffé	Grupos com mais de duas médias
Dunnett	Testemunha vs demais

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Exemplo de contrastes

Trat 1: Empresa A: dose recom (A); 4 aplicações
Trat 2: Empresa A: 2x dose recom. (A); 2 aplicações
Trat 3: Empresa B: dose recom. (B); 4 aplicações
Trat 4: Empresa B: 2x dose recom. (B); 5 aplicações
Trat 5: Testemunha

Tukey

Trat 2	a
Trat 1	ab
Trat 3	b
Trat 4	bc
Trat 5	c

Constrastes

1) **Trat 1** e **2** vs **Trat 3** e **4**
2) **Trat 1** vs **Trat 2**
3) **Trat 3** vs **Trat 4**
4) **Trat 1, 2, 3** e **4** vs **Trat 5**

Estrutura fatorial

Fatorial 2x3 ⇒ 6 tratamentos

Dois fatores:

2 métodos A e B com 3 níveis cada

A → 1, 2, 3 → A1, A2, A3

B → 1, 2, 3 → B1, B2, B3

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Análise de variância do DIC

F.V.	*gl*	*SQ*	*QM*	F_c
Método(*A*)	1	SQA	QMA	QMA/QMR
Dose (*B*)	2	SQB	QMB	QMB/QMR
*A*B*	2	SQA*B	QMA*B	QMA*B/QMR
Resíduo	18	SQR	QMR	
Total	23			

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Ex: Uma Empresa fabricante de recipientes plásticos realizou um experimento para testar os efeitos de 3 recipientes para produção de mudas em 2 espécies de eucaliptos, quanto ao desenvolvimento das mudas. O experimento foi instalado no delineamento inteiramente casualizado, no esquema fatorial 3x2.

R_1 = saco plástico pequeno
R_2 = saco plástico grande
R_3 = laminado

E_1 = *Eucalyptus citriodora*
E_2 = *Eucalyptus grandis*

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias de idade.

ESPÉCIES	RECIPIENTES	REPETIÇÕES 1	2	3	4	TOTAIS
	R_1	26,2	26,0	25,0	25,4	102,6
E_1	R_2	25,7	26,3	25,1	26,4	103,5
	R_3	22,8	19,4	18,8	19,2	80,2
E_2	R_1	24,8	24,6	26,7	25,2	101,3
	R_2	19,6	21,1	19,0	18,6	78,3
	R_3	19,8	21,4	22,8	21,3	85,3

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

$$SQ_{TOTAL} = (142,36^2 + ... + 150,22^2) - \frac{2858,80^2}{20} = 1273,9522$$

$$SQ_{TRAT} = \frac{1}{4}(102,6^2 + ... + 85,3^2) - \frac{551,2^2}{24} = 175,70$$

Análise de variância do experimento

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Tratamentos	5	175,70	35,14	27,45**
Resíduo	18	23,09	1,28	
Total	23	198,79		

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Desdobramento dos GL de tratamentos

ESPÉCIES	RECIPIENTES R_1	R_2	R_3	TOTAIS
E_1	$102,6^{(4)}$	103,5	80,2	$286,3^{(12)}$
E_2	101,3	78,3	85,3	264,9
TOTAIS	$203,9^{(8)}$	181,8	165,5	$551,2^{(24)}$

$$SQ_{RECIPIENTES} = \frac{1}{8}(203,9^2 + ... + 165,5^2) - \frac{551,2^2}{24} = 92,86$$

$$SQ_{ESPÉCIES} = \frac{1}{12}(286,3^2 + 264,9^2) - \frac{551,2^2}{24} = 19,08$$

$$SQ_{R.E.} = \frac{1}{4}(102{,}6^2 + 85{,}3^2) - \frac{551{,}2^2}{24} = 175{,}70$$

$$SQ_{INTERAÇÃORxE} = S.Q.R.E. - S.Q.\mathrm{Re}c. - S.Q.Esp.$$
$$= 175{,}70 - 92{,}86 - 19{,}08 = 63{,}76$$

Análise de variância de acordo com o esquema fatorial 3x2.

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Recipientes (R)	2	92,86	46,43	36,27**
Espécies (E)	1	19,08	19,08	14,91**
Interação R x E	2	63,76	31,88	24,91**
(Tratamentos)	(5)	(175,70)		
Resíduo	18	23,09	1,28	
Total	23	198,79		

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Desdobramento da Interação RxE para estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente

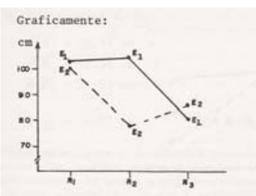
$$SQEsp.d.R_1 = \frac{1}{4}(102{,}6^2 + 101{,}3^2) - \frac{203{,}9^2}{8} = 0{,}21$$

$$SQEsp.d.R_2 = \frac{1}{4}(103{,}5^2 + 78{,}3^2) - \frac{181{,}8^2}{8} = 79{,}38$$

$$SQEsp.d.R_3 = \frac{1}{4}(80{,}2^2 + 85{,}3^2) - \frac{165{,}5^2}{8} = 3{,}25$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Espécies d. R_1	1	0,21	0,21	$0{,}16^{NS}$
Espécies d. R_2	1	79,38	79,38	62,02**
Espécies d. R_3	1	3,25	3,25	$2{,}54^{NS}$
Resíduo	18	23,09	1,28	



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

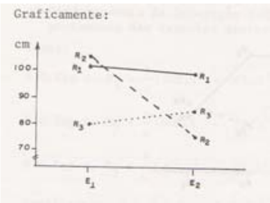
Desdobramento da Interação RxE para estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie

$$SQ\,\text{Rec.d.}E_1 = \frac{1}{4}(102{,}6^2 + 103{,}5^2 + 80{,}2^2) - \frac{286{,}3^2}{12} = 87{,}12$$

$$SQ\,\text{Rec.d.}E_2 = \frac{1}{4}(101{,}3^2 + 78{,}3^2 + 85{,}3^2) - \frac{264{,}9^2}{12} = 69{,}50$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Fontes de Variação	GL	SQ	QM	F
Recipientes d. E_1	2	87,12	43,56	34,03**
Recipientes d. E_2	2	69,50	34,75	27,15**
Resíduo	18	23,09	1,28	



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Comparação das médias dos recipientes d. de E_1

R_1E_1 = 102,6 / 4 = 25,5cm a
R_2E_1 = 103,5 / 4 = 25,88cm a
R_3E_1 = 80,2 / 4 = 20,05cm b

$$s_{(\hat{m})} = \frac{s}{\sqrt{j}} = \frac{\sqrt{1{,}28}}{\sqrt{4}} = 0{,}57cm$$

$$\Delta = q.s_{(\hat{m})} = 3{,}61 \text{ x } 0{,}57 = 2{,}06cm$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Comparação das médias dos recipientes d. de E_2

R_1E_2 = 25,33cm a
R_2E_2 = 19,58cm b
R_3E_2 = 21,33cm b

$$s_{(\hat{m})} = \frac{s}{\sqrt{j}} = \frac{\sqrt{1{,}28}}{\sqrt{4}} = 0{,}57cm$$

$$\Delta = q.s_{(\hat{m})} = 3{,}61 \text{ x } 0{,}57 = 2{,}06cm$$

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Especialização em Estatística Empresarial

Resumo dos resultados do Experimento

	R_1	R_2	R_3
E_1	25,65 a A	25,88 a A	80,2 b A
E_2	25,33 a A	19,58 b B	21,33 b A

- ✓ Para cada espécie, letras minúsculas iguais indicam que as médias não diferem entre si, pelo teste de Tukey (P>0,05)
- ✓ Para cada recipiente, letras maiúsculas iguais indicam que o teste F é não significativo (P>0,05)